Limite d'une suite

1 Introduction à l'étude des suites réelles

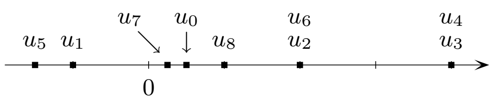
1.1 Premières définitions

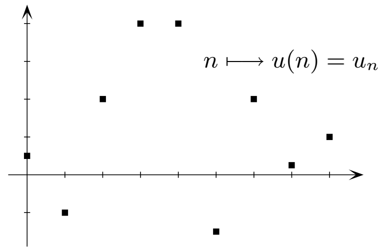
Définition (Suite réelle) On appelle *suite réelle* toute application u de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.
Dans la plupart des cas, la suite u est notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(u_n)_{n\geqslant 0}$. On dit que u_n est son *terme général.*

Remarque

- C'est avec cette définition que nous allons travailler tout au long de ce chapitre. Cela dit, pour tout $N \in \mathbb{N}$ fixé, nous appellerons encore suites réelles les applications de $[\![N,\infty[\![$ dans $\mathbb{R}$. Une telle suite u sera notée $(u_n)_{n\in[\![N,\infty[\![}$ ou $(u_n)_{n\geqslant N}$; son premier terme est u_N, et non u_0.
- Avec cette définition, l'ensemble des suites réelles est $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
- Dans ce chapitre, nous représenterons graphiquement les suites de plusieurs façons. Voici par exemple comment on peut représenter la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont les premiers termes sont :

$$u_0 = \frac{1}{2},\quad u_1 = -1,\quad u_2 = 2,$$
$$u_3 = 4,\quad u_4 = 4,\quad u_5 = -\frac{3}{2},$$
$$u_6 = 2,\quad u_7 = \frac{1}{4},\quad u_8 = 1\ldots$$





Définition (Vocabulaire usuel sur les suites) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

- On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *constante* s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N},\quad u_n = \lambda$.
On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *stationnaire* s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et $N \in \mathbb{N}$ tels que : $\forall n \in \mathbb{N},\quad n \geqslant N \implies u_n = \lambda$.
- On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *majorée* si $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une partie majorée de $\mathbb{R}$, i.e. si : $\exists\, M \in \mathbb{R}/\quad \forall n \in \mathbb{N},\quad u_n \leqslant M$.
Un tel réel M est appelé un *majorant* de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$; on dit aussi que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *majorée par* M ou que M *majore* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *bornée* si elle est à la fois majorée et minorée ; cela revient à dire qu'il existe $K \in \mathbb{R}_+$ tel que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\quad |u_n| \leqslant K.$$
- On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *positive* (resp. *négative*) si elle est minorée (resp. *majorée*) par 0, i.e. si :
$$\forall n \in \mathbb{N},\quad u_n \geqslant 0 \qquad (\text{resp. } u_n \leqslant 0).$$
- On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *croissante* (resp. *strictement croissante*) si : $\forall n \in \mathbb{N},\quad u_n \leqslant u_{n+1}$ (resp. $u_n < u_{n+1}$).
On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *décroissante* (resp. *strictement décroissante*) si : $\forall n \in \mathbb{N},\quad u_n \geqslant u_{n+1}$ (resp. $u_n > u_{n+1}$).
On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *monotone* (resp. *strictement monotone*) si elle est croissante ou décroissante (resp. strictement croissante ou strictement décroissante).

✖✖✖ **Attention !**

- Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne possède jamais un seul majorant : par exemple, si M en est un majorant, tout réel plus grand que M en est aussi un. Raisonnement analogue pour les minorants.
- « Minorée » n'est pas le contraire de « majorée », « négative » n'est pas le contraire de « positive », « décroissante » n'est pas le contraire de « croissante ». Par exemple, la suite de terme général $(-1)^n$ n'est ni croissante ni décroissante, ni positive ni négative.

✎✎✎ **En pratique** Pour montrer qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone, deux techniques classiques :

- étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$;
- **si** $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, étudier la position par rapport à 1 de $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.

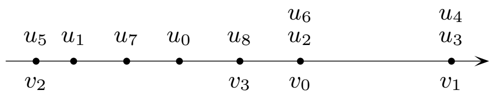
Quand la définition de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne fait intervenir que des produits et des quotients — exemple : $u_n = \dfrac{n^n\sqrt{n}}{e^n}$ — on préférera souvent la seconde méthode, mais il faut alors bien vérifier le signe de u_n.

Définition (Suite extraite) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. On appelle *suite extraite de* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ toute suite réelle $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour laquelle il existe une application φ strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = u_{\varphi(n)}$.

Explication L'application φ strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ n'est jamais qu'une suite strictement croissante d'entiers naturels ; ces entiers naturels vont nous servir d'indices. La suite extraite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors simplement la liste des termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui sont associés aux indices définis par φ.

Par exemple, si $\varphi = (2, 4, 5, 8, 24, 59, \ldots)$, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite $(u_2, u_4, u_5, u_8, u_{24}, u_{59}, \ldots)$; ceci signifie que :

$$v_0 = u_2, \quad v_1 = u_4, \quad v_2 = u_5, \quad v_3 = u_8, \quad v_4 = u_{24}, \quad v_5 = u_{59} \ldots$$



Exemple

- Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle de terme général $u_n = \sqrt{n}$. Les suites $\left(\sqrt{2^n + 4n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites extraites de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, associées respectivement aux applications $n \longmapsto 2^n + 4n$ et $n \longmapsto n^2$ strictement croissantes de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.
- Les suites constantes égales à 1 et -1 respectivement sont deux suites extraites de la suite réelle de terme général $(-1)^n$.

Attention ! La remarque suivante est vraiment importante. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite, on travaille le plus souvent avec les suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le terme qui vient après u_{2n} dans la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est $u_{2(n+1)} = u_{2n+2}$ **et non pas** u_{2n+1} ; de même, le terme qui vient après u_{2n+1} dans la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est $u_{2(n+1)+1} = u_{2n+3}$ **et non pas** u_{2n+2}.

Définition (Opérations sur les suites) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\times}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^\times}$ deux suites et $\lambda \in \mathbb{R}$. On appelle :

- *somme de* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\times}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^\times}$ la suite de terme général $u_n + v_n$;
- *produit de* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\times}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^\times}$ la suite de terme général $u_n v_n$;
- *multiplication de* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *par* λ la suite de terme général λu_n.

Ce qui nous intéresse dans une suite, en général, ce ne sont pas ses premiers termes mais plutôt son comportement « à l'infini ». Ainsi, si tous les termes d'une suite sont majorés par 1 sauf les 30 premiers, on a bien envie de considérer que les 30 premiers termes ne comptent pas et que grosso modo la suite est majorée par 1. On dira dans ce cas que la suite en question est majorée par 1 *à partir d'un certain rang.*

On procède de même avec les autres propriétés usuelles des suites. Ainsi, on l'a vu, une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive si : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geqslant 0$; on dira qu'elle est positive à partir d'un certain rang s'**il existe un rang** N **partir duquel** $u_n \geqslant 0$, autrement dit s'il existe un rang N tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant N \implies u_n \geqslant 0$.

Exemple La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\times}$ de terme général $u_n = \dfrac{10.(-1)^n}{n} + 1$ est positive à partir d'un certain rang.

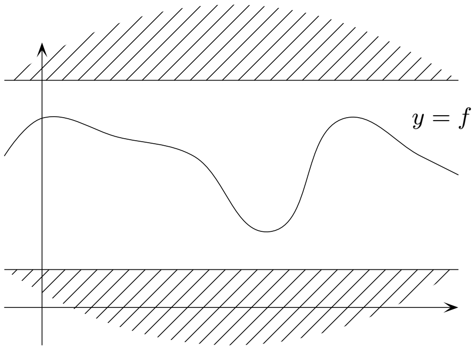
En effet Pour tout $n \in \mathbb{N}^\times$, $u_n \geqslant 1 - \dfrac{10}{n}$. Par conséquent $u_n \geqslant 0$ pour $n \geqslant 10$.

1.2 Premiers exemples

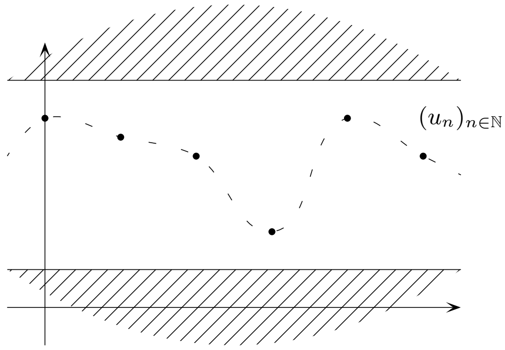
1.2.1 Suites définies explicitement

Certaines suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont définies *explicitement* par une expression de la forme « $u_n = f(n)$ », où f est une fonction. Une telle définition présente un **énorme avantage** : pour calculer u_{1000}, pas besoin de calculer $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_{999}$; on peut directement calculer $u_{1000} = f(1000)$.

En général, la monotonie d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie explicitement au moyen d'une fonction f se lit aisément sur f : si f est croissante, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'est aussi ; si f est strictement croissante, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aussi... De même, si f est majorée, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'est aussi, etc.



f est bornée. . .

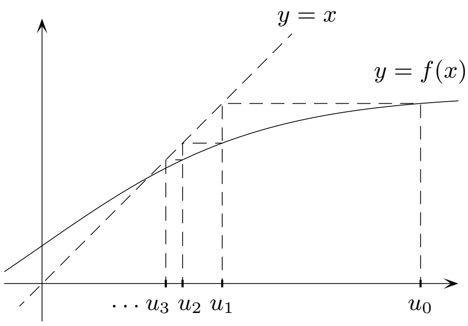


. . . donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

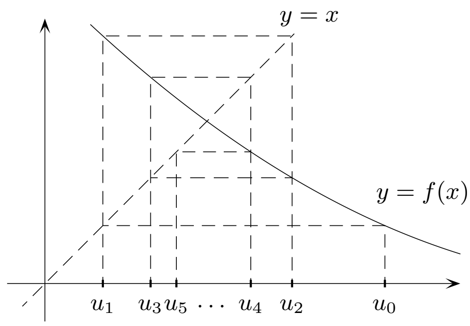
1.2.2 Suites définies par une relation de récurrence « $u_{n+1} = f(u_n)$ »

D'autres suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont définies *par récurrence* par la donnée de u_0 et d'une relation de la forme « $u_{n+1} = f(u_n)$ », où f est une fonction. Une telle définition présente un **énorme inconvénient** : pour calculer u_{1000}, on est obligé de calculer les uns après les autres $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_{999}, u_{1000}$; impossible d'obtenir directement u_{1000}.

✖✖✖ **Attention !** Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente définie au moyen d'une fonction f, la monotonie de f et celle de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'ont en général aucun rapport : f peut être décroissante et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rien du tout, f croissante et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante. . .



f est croissante, mais $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante.



f est décroissante et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas monotone.

Toute donnée d'une fonction f et d'un terme initial u_0 ne conduit pas à la définition correcte d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_{n+1} = f(u_n)$. Par exemple, il n'existe pas de suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 1 + \sqrt{1 - u_n}$. Pour le comprendre, essayez de calculer les premiers termes de cette suite.

Théorème (Existence de suites définies par récurrence) Soient D une partie de $\mathbb{R}$ — en général un intervalle — et $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur D telle que $f(D) \subseteq D$.

Pour tout $\delta \in D$, il existe une et une seule suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_0 = \delta$ et telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$.
Cette suite est à valeurs dans D.

Démonstration Fixons $\delta \in D$.

- **Existence :** Puisque $f(D) \subseteq D$, on peut composer f avec elle-même autant de fois qu'on veut. Posons alors $u_0 = \delta$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = f^n(u_0)$ — où $f^n = f \circ f \circ f \ldots \circ f$ (n fois). On a bien :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(u_n) = f\big(f^n(u_0)\big) = f^{n+1}(u_0) = u_{n+1} \qquad \text{comme voulu.}$$
En outre, $u_n \in D$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- **Unicité :** Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites telles que $u_0 = u'_0 = \delta$ et telles que $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u'_{n+1} = f(u'_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrons par récurrence que $u_n = u'_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
  1) **Initialisation :** Par hypothèse, $u_0 = u'_0 = \delta$.
  2) **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $u_n = u'_n$. Alors $u_{n+1} = f(u_n) = f(u'_n) = u'_{n+1}$. ■

1.2.3 Suites arithmétiques, géométriques et arithmético-géométriques

Les deux encadrés suivants sont des rappels. Le troisième généralise les deux premiers et constitue en principe une nouveauté.

Définition (Suite arithmétique)

- Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite et $r \in \mathbb{R}$. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *arithmétique* (*de raison* r) si : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + r$.
- On a alors : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_0 + nr$.

Définition (Suite géométrique)

- Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite et $q \in \mathbb{R}$. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *géométrique* (*de raison* q) si : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = qu_n$.
- On a alors : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = q^n u_0$.

✌ ✌ ✌ **Explication** Il est important de comprendre le rapport qu'il y a entre la définition par récurrence et l'expression explicite d'une suite arithmétique. Par définition, pour passer du terme u_n au terme u_{n+1} d'une suite arithmétique de raison r, on ajoute r (définition par récurrence « $u_{n+1} = u_n + r$ »). Du coup, si on veut passer directement de u_0 à u_n, on doit passer de u_0 à u_1 en ajoutant r, puis de u_1 à u_2 en ajoutant r... Bref, on doit ajouter n fois r à u_0 (expression explicite « $u_n = u_0 + nr$ »).

Même principe pour les suites géométriques à ceci près qu'on multiplie au lieu d'ajouter.

Définition (Suite arithmético-géométrique)

- Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite et $a, b \in \mathbb{R}$. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *arithmético-géométrique* (*de raison géométrique* a *et de raison arithmétique* b) si : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = au_n + b$.
- Si $a \neq 1$, on a alors : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = a^n u_0 + b\,\dfrac{1-a^n}{1-a}$.

✎ ✎ ✎ **En pratique** N'apprenez pas par cœur la formule que nous venons de démontrer. Vous devez en revanche savoir la retrouver et la démontrer rapidement.

Démonstration Supposons $a \neq 1$ et notons $\ell = \dfrac{b}{1-a}$. Alors $\ell = a\ell + b$ — bref, ℓ est point fixe de la fonction $x \longmapsto ax + b$. Etudions alors la suite $(u_n - \ell)_{n\in\mathbb{N}}$: $\forall n \in \mathbb{N}, \quad (u_{n+1} - \ell) = \Big[(au_n + b) - (a\ell + b)\Big] = a(u_n - \ell)$.

Ainsi $(u_n - \ell)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison a, et donc : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad (u_n - \ell) = a^n(u_0 - \ell)$. La formule que nous voulions démontrer est une simple réécriture de ce résultat. ■

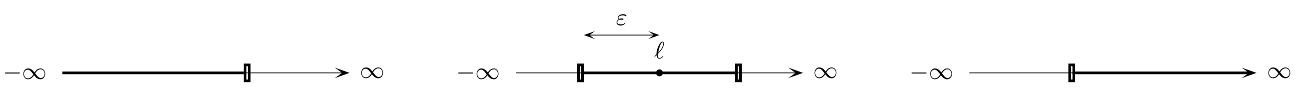
2 Limite d'une suite réelle dans $\bar{\mathbb{R}}$

2.1 Définitions de la limite

Définition (Voisinage dans $\mathbb{R}$) Soit $\ell \in \bar{\mathbb{R}}$. On appelle *voisinage de* ℓ (*dans* $\mathbb{R}$) toute partie de $\mathbb{R}$ contenant :

- si $\ell \in \mathbb{R}$, un intervalle de la forme $]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$ avec $\varepsilon > 0$;
- si $\ell = \infty$, un intervalle de la forme $]A, \infty[$ avec $A \in \mathbb{R}$;
- si $\ell = -\infty$, un intervalle de la forme $]-\infty, A[$ avec $A \in \mathbb{R}$.

✌ ✌ ✌ **Explication** Un voisinage de ℓ est une partie de $\mathbb{R}$ qui contient tous les réels à proximité immédiate de ℓ.



Voisinage typique de $-\infty$ — Voisinage typique de $\ell \in \mathbb{R}$ — Voisinage typique de ∞

La définition suivante est l'objet central de ce chapitre : elle concerne la notion de limite d'une suite. Une définition générale est donnée d'abord, valable pour toute valeur de la limite — un réel ou un infini $\pm\infty$. La définition générale est réécrite alors dans chacun de ces trois cas.

Définition (Limite d'une suite) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite et $\ell \in \bar{\mathbb{R}}$.

- **(Définition générale)** On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *admet ℓ pour limite* si tout voisinage de ℓ contient tous les u_n à partir d'un certain rang ; en d'autres termes, si :

$$\text{pour tout voisinage } \mathcal{V} \text{ de } \ell, \text{ il existe } N \in \mathbb{N} \text{ tel que } : \quad \forall n \geqslant N, \quad u_n \in \mathcal{V}.$$

- **(Cas d'une limite finie)** On suppose que $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *admet ℓ pour limite* si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists\, N \in \mathbb{N}/ \quad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad n \geqslant N \implies |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

- **(Cas de la limite ∞)** On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *admet ∞ pour limite* si :

$$\forall A > 0, \quad \exists\, N \in \mathbb{N}/ \quad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad n \geqslant N \implies u_n \geqslant A.$$

- **(Cas de la limite $-\infty$)** On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *admet $-\infty$ pour limite* si :

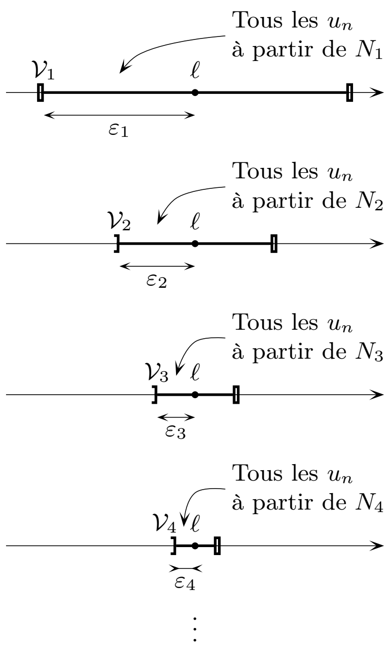
$$\forall A < 0, \quad \exists\, N \in \mathbb{N}/ \quad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad n \geqslant N \implies u_n \leqslant A.$$

✖✖✖ **Attention !** Dans ces définitions, les quantificateurs $\forall$ et $\exists$ ne doivent être permutés sous aucun prétexte.

Démonstration Il s'agit de démontrer l'équivalence de la définition générale et des définitions particulières. Contentons-nous du cas fini et supposons donc que $\ell \in \mathbb{R}$.

- On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet ℓ pour limite au sens de la définition générale. Soit alors $\varepsilon > 0$. L'intervalle $[\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon]$ est un voisinage de ℓ car il contient l'intervalle $\left]\ell - \frac{\varepsilon}{2}, \ell + \frac{\varepsilon}{2}\right[$, donc par hypothèse il existe un rang N à partir duquel $u_n \in [\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon]$; en d'autres termes : $\exists\, N \in \mathbb{N}/ \quad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad n \geqslant N \implies |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$.
- On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet ℓ pour limite au sens de la définition particulière du cas fini. Soit alors $\mathcal{V}$ un voisinage de ℓ : par définition, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[\subseteq \mathcal{V}$. Or par hypothèse il existe un rang N à partir duquel $|u_n - \ell| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$, i.e. $u_n \in \left[\ell - \frac{\varepsilon}{2}, \ell + \frac{\varepsilon}{2}\right]$. Finalement $u_n \in \mathcal{V}$ pour tout $n \geqslant N$. ■

✌✌✌ **Explication** La définition ci-dessus de la limite d'une suite, un peu obscure au premier abord, satisfait en réalité l'intuition que nous avons de cette notion ; c'est ce que nous allons montrer à présent. Donnons-nous donc un réel ℓ — raisonnement analogue si $\ell = \pm\infty$ — et une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de limite ℓ au sens de la définition précédente.



- Partons d'un voisinage $\mathcal{V}_1 =]\ell - \varepsilon_1, \ell + \varepsilon_1[$ de ℓ. Par définition de la limite, il existe un rang N_1 à partir duquel tous les u_n sont piégés dans $\mathcal{V}_1$, c'est-à-dire entre $\ell - \varepsilon_1$ et $\ell + \varepsilon_1$. De la sorte, nous n'avons aucun renseignement sur les u_n pour $n < N_1$ mais nous sommes certains que les u_n pour $n \geqslant N_1$ ne s'éloignent pas trop de ℓ.

  Cela nous gêne-t-il de n'avoir aucun renseignement sur les premières valeurs de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$? Pas du tout, car le comportement d'une suite à l'infini ne dépend nullement de ses premiers termes. Cette remarque explique qu'on travaille seulement « à partir d'un certain rang ».

  Mais notre travail avec $\mathcal{V}_1$ suffit-il à nous convaincre que ℓ est limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$? Eh bien non, car il se pourrait bien que les u_n pour $n \geqslant N_1$ se promènent librement dans $\mathcal{V}_1$ sans pour autant s'approcher de ℓ.

- Essayons donc de piéger les u_n plus près encore de ℓ. Donnons-nous pour cela un voisinage $\mathcal{V}_2 =]\ell - \varepsilon_2, \ell + \varepsilon_2[$ de ℓ inclus dans $\mathcal{V}_1$. Par définition de la limite, il existe un rang N_2 à partir duquel tous les u_n sont piégés dans $\mathcal{V}_2$ entre $\ell - \varepsilon_2$ et $\ell + \varepsilon_2$. De la sorte, nous n'avons aucun renseignement sur les u_n pour $n < N_2$ mais nous avons réussi à piéger les u_n pour $n \geqslant N_2$ autour de ℓ mieux que nous ne l'avions fait avec le voisinage $\mathcal{V}_1$.

  Mais cela suffit-il à nous convaincre que ℓ est limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$? Toujours pas à vrai dire, car il se pourrait bien que les u_n pour $n \geqslant N_2$ se promènent librement dans $\mathcal{V}_2$ sans pour autant s'approcher de ℓ.

- Répétant l'étape précédente avec un nouveau voisinage $\mathcal{V}_3 =]\ell-\varepsilon_3, \ell+\varepsilon_3[$ de ℓ inclus dans $\mathcal{V}_2$, nous parvenons à rapprocher plus efficacement encore les u_n de ℓ à partir d'un certain rang N_3.

  Cela dit, on pourrait continuer cette promenade très longtemps sans avoir pour autant l'impression que ℓ est bel et bien limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Paradoxalement c'est pourtant ce qu'il faut faire : continuer la promenade en piégeant les u_n dans des voisinages toujours plus petits autour de ℓ. A chaque fois qu'on rétrécit le voisinage avec lequel on travaille, on accouple les u_n de plus en plus à ℓ pour n tendant vers ∞.

  Et puisqu'on peut répéter cette opération de rétrécissement des voisinages **autant de fois qu'on veut** — la définition dit « pour tout voisinage... », **c'est ce qui est essentiel** — on en arrive tout naturellement à la conclusion que les u_n sont aussi proches qu'on le souhaite de ℓ : pour voir tous les u_n très très près de ℓ à partir d'un certain rang, on n'a qu'à considérer un voisinage de ℓ assez petit.

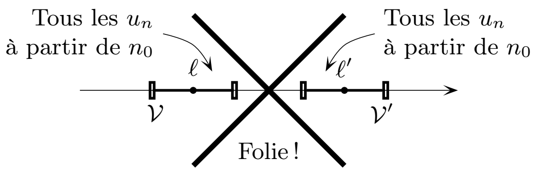
✎✎✎ **En pratique** Vous n'êtes pas obligés d'apprendre la définition générale de la limite car elle n'est pas au programme. Je m'en servirai cependant dans ce cours pour deux raisons : 1) je pense qu'elle vous aidera à comprendre les définitions particulières ; 2) elle évite, dans les démonstrations du cours, qu'on distingue toujours trois cas selon la valeur de la limite.

En revanche, il est impensable que vous ne connaissiez pas sur le bout des doigts les trois définitions particulières qui en découlent.

Remarque On peut montrer que dans les définitions de la limite, les inégalités larges « $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$ », « $u_n \geqslant A$ » et « $u_n \leqslant A$ » peuvent être remplacées par des inégalités strictes. Vous avez donc le choix des armes : si vous préférez les inégalités strictes, n'hésitez pas.

Théorème (Unicité de la limite) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède une limite, celle-ci est unique, notée $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.
Pour tout $\ell \in \bar{\mathbb{R}}$, la relation $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \ell$ se note souvent $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \ell$.

Démonstration On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet pour limites $\ell \in \bar{\mathbb{R}}$ et $\ell' \in \bar{\mathbb{R}}$. Il s'agit de montrer que $\ell = \ell'$. Raisonnons par l'absurde en supposant que $\ell \neq \ell'$. Il existe alors un voisinage $\mathcal{V}$ de ℓ et un voisinage $\mathcal{V}'$ de ℓ' tels que $\mathcal{V} \cap \mathcal{V}' = \varnothing$. Or, par hypothèse sur $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, il existe un rang N à partir duquel $u_n \in \mathcal{V}$ et un rang N' à partir duquel $u_n \in \mathcal{V}'$. Posons $n_0 = \max\left\{N, N'\right\}$. Alors pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \in \mathcal{V} \cap \mathcal{V}' = \varnothing$ — contradiction. Le résultat s'ensuit. ■



✌✌✌ **Explication** Il y a une idée dans la démonstration précédente que nous allons retrouver tout au long de ce chapitre. Supposons qu'une certaine propriété $\mathcal{P}_1$ soit vraie à partir d'un rang N_1, qu'une certaine propriété $\mathcal{P}_2$ soit vraie à partir d'un rang N_2... et enfin qu'une certaine propriété $\mathcal{P}_k$ soit vraie à partir d'un rang N_k. Alors à partir du rang $n_0 = \max\left\{N_1, N_2, \ldots, N_k\right\}$, les propriétés $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \ldots, \mathcal{P}_k$ sont toutes vraies à la fois.

Le résultat suivant est un conséquence directe de la définition de la limite.

Théorème Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite et $\ell \in \mathbb{R}$. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \ell \iff \lim\limits_{n\to\infty} \big(u_n - \ell\big) = 0.$

Exemple $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n^2+2} = 0.$

En effet Nous devons montrer que : $\forall \varepsilon > 0, \quad \exists\, N \in \mathbb{N}/ \quad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad n \geqslant N \implies \left|\dfrac{n}{n^2+2}\right| \leqslant \varepsilon.$

Soit donc $\varepsilon > 0$. On cherche un rang N à partir duquel $\left|\dfrac{n}{n^2+2}\right| = \dfrac{n}{n^2+2} \leqslant \varepsilon$. Mais comme $\dfrac{n}{n^2+2} \leqslant \dfrac{n}{n^2} = \dfrac{1}{n}$ pour $n \neq 0$, il nous **suffit** en fait de trouver un rang N à partir duquel $\dfrac{1}{n} \leqslant \varepsilon$. En effet :

$$\left\{\begin{array}{l}\text{si on trouve un rang } N \text{ à partir duquel } \dfrac{1}{n} \leqslant \varepsilon,\\ \text{sachant que } \dfrac{n}{n^2+2} \leqslant \dfrac{1}{n} \text{ pour } n \neq 0,\end{array}\right. \qquad \text{alors on aura trouvé un rang } N \text{ à partir duquel } \dfrac{n}{n^2+2} \leqslant \varepsilon.$$

Nous venons ainsi de réduire la difficulté du problème. Or pour tout $n \in \mathbb{N}^\times$: $\quad \dfrac{1}{n} \leqslant \varepsilon \quad \Longleftrightarrow \quad n \geqslant \dfrac{1}{\varepsilon}$. Ceci montre qu'à partir du rang $N = \left\lfloor \dfrac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$, l'inégalité $\dfrac{1}{n} \leqslant \varepsilon$ est vraie.
Nous en avons donc terminé : à partir du rang $N = \left\lfloor \dfrac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$, on a $\dfrac{n}{n^2+2} \leqslant \varepsilon$ comme voulu.

Exemple $\quad \lim\limits_{n \to \infty} \left(n^2 + (-1)^n n \right) = \infty$.

En effet $\quad$ Nous devons montrer que : $\quad \forall A > 0, \quad \exists\, N \in \mathbb{N}/ \quad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad n \geqslant N \implies n^2 + (-1)^n n \geqslant A$.

Soit donc $A > 0$. On cherche un rang N à partir duquel $n^2 + (-1)^n n \geqslant A$. Il nous **suffit** en fait de trouver un rang N à partir duquel $(n-1)^2 \geqslant A$, car $n^2 + (-1)^n n \geqslant n^2 - n = n(n-1) \geqslant (n-1)^2$. En effet :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{si on trouve un rang } N \\ \text{à partir duquel } (n-1)^2 \geqslant A, \\ \text{sachant que } n^2 + (-1)^n n \geqslant (n-1)^2, \end{array} \right. \qquad \text{alors on aura trouvé un rang } N \text{ à partir duquel } n^2 + (-1)^n n \geqslant A.$$

Nous venons ainsi de réduire la difficulté du problème. Or pour tout $n \in \mathbb{N}^\times$: $\quad (n-1)^2 \geqslant A \quad \Longleftrightarrow \quad n \geqslant \sqrt{A} + 1$.
Ceci montre qu'à partir du rang $N = \lfloor \sqrt{A} \rfloor + 2$, l'inégalité $(n-1)^2 \geqslant A$ est vraie.
Nous en avons donc terminé : à partir du rang $N = \lfloor \sqrt{A} \rfloor + 2$, on a $n^2 + (-1)^n n \geqslant A$ comme voulu.

2.2 Convergence et divergence

Définition (Convergence et divergence) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite. On dit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est *convergente* ou qu'elle *converge* si elle possède une limite finie ; on dit sinon qu'elle est *divergente* ou qu'elle *diverge*.

✖✖✖ **Attention !** La convergence n'est pas le fait de posséder une limite. Ainsi une suite de limite $\pm\infty$ est divergente et possède pourtant une limite.

Théorème (Convergence et bornitude) Toute suite convergente est bornée.

Démonstration Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite convergente. Notons ℓ sa limite — $\ell \in \mathbb{R}$. Pour $\varepsilon = 1$, la définition de la limite affirme l'existence d'un rang N à partir duquel $|u_n - \ell| \leqslant 1$. On a donc, pour tout $n \geqslant N$:

$$|u_n| = \Big| (u_n - \ell) + \ell \Big| \leqslant |u_n - \ell| + |\ell| \leqslant |\ell| + 1 \qquad \text{via l'inégalité triangulaire.}$$

Si $K = \max \Big\{ |u_0|, |u_1|, |u_2|, \ldots, |u_{N-1}|, |\ell| + 1 \Big\}$, alors : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leqslant K$, $\quad$ et donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.

En résumé, la preuve montre d'abord que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée à partir d'un certain rang ; mais évidemment les premiers termes ne poussent pas la suite vers l'infini, donc en fait la suite est bornée tout court. ■

✖✖✖ **Attention !**

- La réciproque de cette proposition est fausse : toute suite bornée n'est pas convergente. Ainsi la suite de terme général $(-1)^n$ est bornée (comprise entre -1 et 1), mais elle ne converge pas.
- On pourrait croire qu'en tout cas une suite non bornée admet pour limite ∞ ou $-\infty$: il n'en est rien. Ainsi la suite de terme général $(-1)^n n$ a beau n'être pas bornée, elle n'a cependant pas de limite — ses termes d'indice pair s'approchent de ∞, ses termes d'indice impair de $-\infty$.

2.3 Limite et suites extraites

Lemme Soit φ une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. Alors : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \varphi(n) \geqslant n$.

Démonstration Par récurrence. Bien sûr, $\varphi(0) \geqslant 0$.
Soit alors $n \in \mathbb{N}$ tel que $\varphi(n) \geqslant n$. Montrons que $\varphi(n+1) \geqslant n+1$. Or $\varphi(n+1) > \varphi(n) \geqslant n$. Mais $\varphi(n+1)$ est un entier, donc $\varphi(n+1) \geqslant n+1$ et c'est terminé. ■

Théorème (Limite et suites extraites) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite et $\ell \in \bar{\mathbb{R}}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \ell$.

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} u_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} u_{2n+1} = \ell$.

(iii) Toute suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet ℓ pour limite.

Démonstration

(i) $\Longrightarrow$ (iii) On suppose que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \ell$. Soit φ une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. Montrons que $\big(u_{\varphi(n)}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ admet ℓ pour limite.
Soit donc $\mathcal{V}$ un voisinage de ℓ. Il existe un rang N à partir duquel $u_n \in \mathcal{V}$. Soit alors $n \geqslant N$. La croissance de φ et le lemme précédent nous disent que $\varphi(n) \geqslant \varphi(N) \geqslant N$. Par conséquent $u_{\varphi(n)} \in \mathcal{V}$.
Conclusion : pour tout voisinage $\mathcal{V}$ de ℓ, il existe un rang (N) à partir duquel tous les u_n sont dans $\mathcal{V}$; en d'autres termes, $\lim\limits_{n\to\infty} u_{\varphi(n)} = \ell$.

(iii) $\Longrightarrow$ (ii) Evident, puisque $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites extraites de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(ii) $\Longrightarrow$ (i) On suppose que $\lim\limits_{n\to\infty} u_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} u_{2n+1} = \ell$. Montrons que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \ell$.
Soit donc $\mathcal{V}$ un voisinage de ℓ. Il existe un rang N à partir duquel $u_{2n} \in \mathcal{V}$ et un rang N' à partir duquel $u_{2n+1} \in \mathcal{V}$. Posons $n_0 = \max\Big\{2N, 2N'+1\Big\}$ et donnons-nous $n \geqslant n_0$ quelconque.

1) Si n est pair, disons $n = 2p$, alors on a $n = 2p \geqslant n_0 \geqslant 2N$, et donc $p \geqslant N$. Du coup $u_n = u_{2p} \in \mathcal{V}$.

2) Si n est impair, disons $n = 2p+1$, alors on a $n = 2p+1 \geqslant n_0 \geqslant 2N'+1$, et donc $p \geqslant N'$. Du coup $u_n = u_{2p+1} \in \mathcal{V}$.

Dans les deux cas, $u_n \in \mathcal{V}$. Conclusion : pour tout voisinage $\mathcal{V}$ de ℓ, il existe un rang (n_0) à partir duquel tous les u_n sont dans $\mathcal{V}$; en d'autres termes, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \ell$. ■

✎✎✎ **En pratique** Ce théorème est souvent utilisé pour montrer qu'une suite donnée **n'a pas de limite** : il suffit pour ce faire d'en exhiber deux suites extraites n'ayant pas la même limite — éventuellement pas de limite.
Ainsi la suite de terme général $u_n = (-1)^n$ n'a pas de limite car on a : $u_{2n} = 1 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$ et $u_{2n+1} = -1 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -1$.

2.4 Opérations sur les limites

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites et $\lambda \in \mathbb{R}$. Les tableaux regroupés dans cette partie expliquent de quelle manière il est permis de passer à la limite les opérations de somme, multiplication par un scalaire, etc.

✖✖✖ **Attention !** Dans les tableaux suivants, le symbole **? ? ?** ne signifie pas une absence de limite mais une *indétermination* : là où il apparaît, plusieurs résultats de limite sont a priori possibles selon le contexte ; il faut davantage d'informations pour se décider.

2.4.1 Somme

$\lim\limits_{n\to\infty} u_n$	$\ell \in \mathbb{R}$	$\ell \in \mathbb{R}$	$\ell \in \mathbb{R}$	∞	∞	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to\infty} v_n$	$\ell' \in \mathbb{R}$	∞	$-\infty$	∞	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to\infty} (u_n+v_n)$	$\ell+\ell'$	∞	$-\infty$	∞	**? ? ?**	$-\infty$

Démonstration

- **Cas $\ell \in \mathbb{R}/\ell' \in \mathbb{R}$:** Soit $\varepsilon > 0$. Par hypothèse : $\begin{cases} \exists\ N \in \mathbb{N}/ \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant N \implies |u_n - \ell| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2} \\ \exists\ N' \in \mathbb{N}/ \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant N' \implies |v_n - \ell'| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2} \end{cases}$.

  Posons $n_0 = \max\Big\{N, N'\Big\}$. Alors pour tout $n \geqslant n_0$, via l'inégalité triangulaire :
  $$\Big|(u_n+v_n) - (\ell+\ell')\Big| = \Big|(u_n-\ell) + (v_n-\ell')\Big| \leqslant |u_n-\ell| + |v_n-\ell'| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$
  Conclusion : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang (n_0) à partir duquel $\Big|(u_n+v_n) - (\ell+\ell')\Big| \leqslant \varepsilon$; en d'autres termes, $\lim\limits_{n\to\infty} (u_n+v_n) = \ell+\ell'$.

- **Cas $\ell \in \mathbb{R}/\infty$:** Soit $A>0$. Par hypothèse : $\begin{cases} \exists\, N \in \mathbb{N}/ \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant N \implies |u_n - \ell| \leqslant 1 \\ \exists\, N' \in \mathbb{N}/ \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant N' \implies v_n \geqslant A - \ell + 1 \end{cases}$.
Posons $n_0 = \max\left\{N, N'\right\}$. Alors pour tout $n \geqslant n_0$: $\quad (u_n + v_n) \geqslant (\ell - 1) + (A - \ell + 1) = A$.
Conclusion : pour tout $A>0$, il existe un rang (n_0) à partir duquel $(u_n+v_n) \geqslant A$, i.e. $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n+v_n) = \infty$.

- **Cas ∞/∞ :** Soit $A>0$. Par hypothèse : $\begin{cases} \exists\, N \in \mathbb{N}/ \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant N \implies u_n \geqslant A \\ \exists\, N' \in \mathbb{N}/ \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant N' \implies v_n \geqslant 0 \end{cases}$. Posons $n_0 = \max\left\{N, N'\right\}$. Alors pour tout $n \geqslant n_0$: $\quad (u_n + v_n) \geqslant A + 0 = A$.
Conclusion : pour tout $A>0$, il existe un rang (n_0) à partir duquel $(u_n+v_n) \geqslant A$, i.e. $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n+v_n) = \infty$.

Les autres cas se traitent de façon analogue. ■

✖✖✖ **Attention !** L'opération $\infty - \infty$ peut donner **n'importe quel résultat**. Dans chacun des cas suivants, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \infty$ et $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = -\infty$, et pourtant :

- si $u_n = n + \lambda$ et $v_n = -n$ ($\lambda \in \mathbb{R}$ fixé), $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n+v_n) = \lambda$;
- si $u_n = n$ et $v_n = -2n$, $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n+v_n) = -\infty$;
- si $u_n = 2n$ et $v_n = -n$, $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n+v_n) = \infty$;
- si $u_n = n + (-1)^n$ et $v_n = -n$, $(u_n+v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite.

2.4.2 Produit

$\lim\limits_{n\to\infty} u_n$	$\ell \in \mathbb{R}$	$\ell \in \mathbb{R}_+^\times$	$\ell \in \mathbb{R}_+^\times$	0	$\ell \in \mathbb{R}_-^\times$	$\ell \in \mathbb{R}_-^\times$	∞	∞	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to\infty} v_n$	$\ell' \in \mathbb{R}$	∞	$-\infty$	$\pm\infty$	∞	$-\infty$	∞	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to\infty} (u_n v_n)$	$\ell\ell'$	∞	$-\infty$	**???**	$-\infty$	∞	∞	$-\infty$	∞

Démonstration

- **Cas $\ell \in \mathbb{R}/\ell' \in \mathbb{R}$:** $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, donc bornée : $\quad \exists\, K>0/ \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leqslant K$.
Soit $\varepsilon > 0$. Par hypothèse : $\begin{cases} \exists\, N \in \mathbb{N}/ \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant N \implies |u_n - \ell| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2K} \\ \exists\, N' \in \mathbb{N}/ \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant N' \implies |v_n - \ell'| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2\big(|\ell|+1\big)} \end{cases}$. Posons $n_0 = \max\left\{N, N'\right\}$. Alors pour tout $n \geqslant n_0$, via l'inégalité triangulaire :
$$\left|u_n v_n - \ell\ell'\right| = \Big|(u_n - \ell)v_n + \ell(v_n - \ell')\Big| \leqslant |u_n - \ell|.|v_n| + |\ell|.|v_n - \ell'| \leqslant \frac{\varepsilon}{2K}\, K + |\ell|\, \frac{\varepsilon}{2\big(|\ell|+1\big)} \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$
Conclusion : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang (n_0) à partir duquel $\left|u_n v_n - \ell\ell'\right| \leqslant \varepsilon$; en d'autres termes, $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n v_n) = \ell\ell'$.

- **Cas $\ell \in \mathbb{R}_+^\times/\infty$:** Soit $A>0$. Par hypothèse : $\begin{cases} \exists\, N \in \mathbb{N}/ \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant N \implies |u_n - \ell| \leqslant \dfrac{\ell}{2} \\ \exists\, N' \in \mathbb{N}/ \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant N' \implies v_n \geqslant \dfrac{2A}{\ell} \end{cases}$.
En particulier, pour $n \geqslant N$, $u_n \geqslant \dfrac{\ell}{2} > 0$. Posons $n_0 = \max\left\{N, N'\right\}$. Alors pour tout $n \geqslant n_0$:
$$u_n v_n \geqslant \frac{\ell}{2} \times \frac{2|A|}{\ell} = A.$$
Conclusion : pour tout $A>0$, il existe un rang (n_0) à partir duquel $u_n v_n \geqslant A$, i.e. $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n v_n) = \infty$.

- **Cas ∞/∞ :** Soit $A>0$. Par hypothèse : $\begin{cases} \exists\, N \in \mathbb{N}/ \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant N \implies u_n \geqslant A \\ \exists\, N' \in \mathbb{N}/ \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant N' \implies v_n \geqslant 1 \end{cases}$. Posons $n_0 = \max\left\{N, N'\right\}$. Alors pour tout $n \geqslant n_0$: $\quad u_n v_n \geqslant A \times 1 = A$.
Conclusion : pour tout $A>0$, il existe un rang (n_0) à partir duquel $u_n v_n \geqslant A$, i.e. $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n v_n) = \infty$. ■

✖✖✖ **Attention !** L'opération $0 \times \pm\infty$ peut donner **n'importe quel résultat**. Dans chacun des cas suivants, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = \infty$, et pourtant :

- si $u_n = \dfrac{\lambda}{n}$ et $v_n = n$ ($\lambda \in \mathbb{R}$ fixé), $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n v_n) = \lambda$;
- si $u_n = \dfrac{1}{n^2}$ et $v_n = n$, $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n v_n) = 0$;
- si $u_n = \dfrac{1}{n}$ et $v_n = n^2$, $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n v_n) = \infty$;
- si $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ et $v_n = n$, $(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite.

2.4.3 Multiplication par un scalaire

$\lim\limits_{n\to\infty} u_n$	$\ell \in \mathbb{R}$	∞	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to\infty} (\lambda u_n)$	$\lambda\ell$	∞ si $\lambda > 0$ 0 si $\lambda = 0$ $-\infty$ si $\lambda < 0$	$-\infty$ si $\lambda > 0$ 0 si $\lambda = 0$ ∞ si $\lambda < 0$

2.4.4 Inverse

On suppose $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non nulle à partir d'un certain rang.

$\lim\limits_{n\to\infty} u_n$	$\ell \in \mathbb{R}^\times$	0	$\pm\infty$
$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{u_n}$	$\dfrac{1}{\ell}$	∞ si $u_n > 0$ à partir d'un certain rang $-\infty$ si $u_n < 0$ à partir d'un certain rang **? ? ?** sinon	0

Démonstration On suppose pour simplifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq 0$.

- **Cas $\ell \in \mathbb{R}^\times$:** Soit $\varepsilon > 0$. Par hypothèse il existe un rang N à partir duquel $|u_n - \ell| \leqslant \min\left\{\frac{|\ell|}{2}, \frac{\varepsilon|\ell|^2}{2}\right\}$. En particulier, on a pour tout $n \geqslant N$, via l'inégalité triangulaire :

$$\Big||u_n| - |\ell|\Big| \leqslant |u_n - \ell| \leqslant \frac{|\ell|}{2}, \qquad \text{donc } |u_n| \geqslant \frac{|\ell|}{2}.$$

Du coup pour tout $n \geqslant N$: $\quad \left|\dfrac{1}{u_n} - \dfrac{1}{\ell}\right| = \dfrac{|u_n - \ell|}{|u_n|.|\ell|} \leqslant \dfrac{\frac{\varepsilon|\ell|^2}{2}}{\frac{|\ell|}{2} \times |\ell|} = \varepsilon.$

Conclusion : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang (N) à partir duquel $\left|\dfrac{1}{u_n} - \dfrac{1}{\ell}\right| \leqslant \varepsilon$, i.e. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{u_n} = \dfrac{1}{\ell}$.

- **Cas 0 avec $u_n > 0$ à partir d'un certain rang :** Soit $A > 0$. Par hypothèse il existe un rang N à partir duquel $|u_n| \leqslant \dfrac{1}{A}$. Alors pour tout $n \geqslant N$: $\quad u_n \geqslant A$.

Conclusion : pour tout $A > 0$, il existe un rang (N) à partir duquel $u_n \geqslant A$, i.e. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{u_n} = \infty$.

- **Cas ∞ :** Soit $\varepsilon > 0$. Par hypothèse il existe un rang N à partir duquel $u_n \geqslant \dfrac{1}{\varepsilon}$. Alors pour tout $n \geqslant N$:

$$\left|\frac{1}{u_n}\right| = \frac{1}{u_n} \leqslant \varepsilon.$$

Conclusion : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang (N) à partir duquel $\left|\dfrac{1}{u_n}\right| \leqslant \varepsilon$, i.e. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{u_n} = 0$. ■

Remarque On pourrait contruire un tableau « quotient » à partir des tableaux « produit » et « inverse ». On y découvrirait de nouveaux cas d'indétermination : $\dfrac{1}{0}$ et $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$.

2.4.5 Composition à gauche par une fonction

Le résultat suivant est momentanément admis car il requiert la notion de limite d'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, notion que nous étudierons dans un prochain chapitre. Pour le comprendre et l'utiliser, on se contentera momentanément de la notion de limite d'une fonction introduite intuitivement au lycée.

Théorème (Image d'une suite par une fonction) Soient $\ell, L \in \bar{\mathbb{R}}$, I un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant ℓ ou d'extrêmité ℓ, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite.

$$\text{Si } \lim_{n\to\infty} u_n = \ell, \text{ et si } \lim_{x\to\ell} f(x) = L, \text{ alors } \lim_{n\to\infty} f(u_n) = L.$$

2.5 Quelques exemples classiques

Théorème (Limite d'une suite géométrique) Soit $a \in \mathbb{R}$. $\begin{cases} \text{Si } |a| < 1, & \lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0. \\ \text{Si } a = 1, & \lim\limits_{n\to\infty} a^n = 1. \\ \text{Si } a > 1, & \lim\limits_{n\to\infty} a^n = \infty. \\ \text{Si } a \leqslant -1, & (a^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ n'a pas de limite.} \end{cases}$

Démonstration

- Le cas $a = 1$ est une trivialité.
- Supposons $a > 1$ et posons $\alpha = a - 1$. Alors $\alpha > 0$. Pour $n \geqslant 2$, on a :

$$\bigstar \qquad a^n = (1+\alpha)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha^k = 1 + n\alpha + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \alpha^k \geqslant n\alpha.$$

Montrons que $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = \infty$. Soit $A \in \mathbb{R}$. Nous devons montrer que $a^n \geqslant A$ à partir d'un certain rang. Via $\bigstar$, il nous suffit pour cela de montrer que $n\alpha \geqslant A$ à partir d'un certain rang. Posons $N = \left\lfloor \frac{A}{\alpha} \right\rfloor + 1$. On a bien, pour tout $n \geqslant N$: $\quad n\alpha \geqslant N\alpha \geqslant \frac{A}{\alpha}\,\alpha = A$.
Conclusion : pour tout $A \in \mathbb{R}$, il existe un rang (N) à partir duquel $a^n \geqslant A$, i.e. $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = \infty$.

- Supposons $|a| < 1$. Alors $\frac{1}{|a|} > 1$, donc $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{|a|}\right)^n = \infty$ via le cas précédent. Par passage à l'inverse, nous obtenons la limite $\lim\limits_{n\to\infty} \left|a^n\right| = 0$, donc la limite $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$.
- Supposons $a = -1$. On a donc : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} a^{2n} = 1 \\ a^{2n+1} = -1 \end{cases}$. Du coup $\lim\limits_{n\to\infty} a^{2n} = 1$ et $\lim\limits_{n\to\infty} a^{2n+1} = -1$. Les suites extraites $(a^{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(a^{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ n'ayant pas la même limite, la suite $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite.
- Supposons $a < -1$. On a donc : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} a^{2n} = (a^2)^n \\ a^{2n+1} = a(a^2)^n \end{cases}$. Or $a^2 > 1$, nous avons donc déjà montré que $\lim\limits_{n\to\infty} a^{2n} = \infty$. Et puisque $a < 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} a^{2n+1} = -\infty$. Enfin, les suites extraites $(a^{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(a^{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ n'ayant pas la même limite, la suite $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite. ■

Exemple Soit $a \in]-1, 1[$. Alors $\lim\limits_{n\to\infty} a^{2^n} = 0$.

En effet Nous savons que $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$ via l'exemple précédent. Or $\left(a^{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$; le théorème sur les limites de suites extraites donne aussitôt le résultat.

✖✖✖ <u>**Attention**</u> **!** Dans l'exemple précédent, la suite de terme général a^{2^n} **n'est pas** géométrique : a^{2^n} et $(a^2)^n$ n'ont RIEN à voir l'un avec l'autre. Cette confusion est très fréquente chez les élèves : vous me ferez le plaisir de l'éviter.

Exemple (Comparaison exponentielles/puissances) Soient $a, \alpha \in \mathbb{R}$ avec $a > 1$. $\quad \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^\alpha}{a^n} = 0$.

En effet Nous savons comparer les puissances et les exponentielles au voisinage de ∞ : $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = 0$. On obtient le résultat annoncé en composant cette limite avec la limite évidente $\lim\limits_{n\to\infty} n = \infty$.

Exemple Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\quad \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$.

En effet Pour tout $n \in \mathbb{N}^\times$: $\quad \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}$. Or le programme de Terminale affirme que $\lim\limits_{u\to 0} \frac{\ln(1+u)}{u} = 1$; du coup, par composition, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}{\frac{x}{n}} = 1$, ou encore $\lim\limits_{n\to\infty} n\ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) = x$.
Composant de nouveau avec l'exponentielle, sachant que $\lim\limits_{t\to x} e^t = e^x$, on obtient le résultat voulu.

✖✖✖ <u>**Attention**</u> **!** Ce n'est pas parce qu'on a $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right) = 1$ que $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = 1$. Nous n'avons pas affaire à une suite géométrique de raison 1 car ici la « raison » dépend de n. Eh oui, ça change TOUT et vous devez le retenir !

2.6 Passage à la limite et relation d'ordre

Théorème (Limites et inégalités larges) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles, $\ell, \ell' \in \mathbb{R}$ et $m, M \in \mathbb{R}$.

(i) Si $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \ell$, $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = \ell'$ et si $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang, alors $\ell \leqslant \ell'$.

(ii) Si $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \ell$ et si $u_n \leqslant M$ à partir d'un certain rang, alors $\ell \leqslant M$.

(iii) Si $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \ell$ et si $u_n \geqslant m$ à partir d'un certain rang, alors $\ell \geqslant m$.

✖✖✖ **Attention !** Ces résultats sont faux avec des inégalités strictes : les inégalités strictes ne sont pas conservées par passage à la limite. Ainsi la limite $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ n'est pas strictement positive, et pourtant : $\forall n \in \mathbb{N}^\times$, $\dfrac{1}{n} > 0$.

Démonstration

(i) Les limites ℓ et ℓ' étant finies, nous savons que $\lim\limits_{n\to\infty} (v_n - u_n) = \ell' - \ell$. Pour montrer que $\ell' - \ell \geqslant 0$, raisonnons par l'absurde en supposant que $\ell' - \ell < 0$. Par définition de la limite, il existe donc un rang N à partir duquel $\left|(v_n - u_n) - (\ell' - \ell)\right| \leqslant \dfrac{\ell - \ell'}{2}$. En particulier, pour tout $n \geqslant N$:
$$v_n - u_n \leqslant (\ell' - \ell) + \frac{\ell - \ell'}{2} = \frac{\ell' - \ell}{2} < 0.$$
Ceci vient contredire le fait que par hypothèse, à partir d'un certain rang (a priori autre que N) $u_n \leqslant v_n$. Ainsi $\ell' - \ell \geqslant 0$ comme voulu.

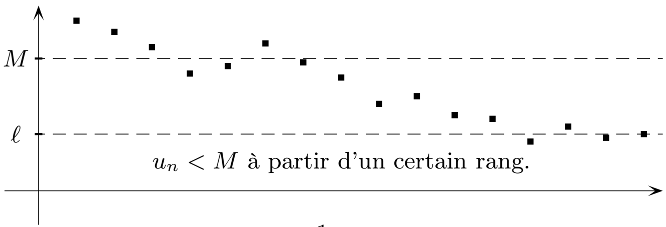
(ii) et (iii) sont des cas particuliers de l'assertion (i), quand l'une des suites est constante. ■

Théorème (Limites et inégalités strictes) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle, $\ell \in \mathbb{R}$ et $m, M \in \mathbb{R}$.

(i) Si $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \ell$ et si $\ell < M$, alors $u_n < M$ à partir d'un certain rang.

(ii) Si $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \ell$ et si $\ell > m$, alors $u_n > m$ à partir d'un certain rang.

✌✌✌ **Explication** On illustre ci-contre l'assertion (i).



✖✖✖ **Attention !** Ces résultats sont faux avec des inégalités larges. Ainsi la limite $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ est négative ou nulle, et pourtant : $\forall n \in \mathbb{N}^\times$, $\dfrac{1}{n} > 0$.

Démonstration Contentons-nous de démontrer l'assertion (i). Par hypothèse, puisque $M - \ell > 0$, il existe un rang N à partir duquel $|u_n - \ell| \leqslant \dfrac{M - \ell}{2}$. Alors pour tout $n \geqslant N$: $u_n \leqslant \ell + \dfrac{M - \ell}{2} = \dfrac{M + \ell}{2} < \dfrac{M + M}{2} = M$, comme voulu. ■

3 Théorèmes d'existence de limites pour les suites réelles

Nous avons jusqu'ici plutôt étudié les **propriétés** de la notion de limite ; nos résultats étaient de la forme : « **si** une suite possède une limite, alors voilà ce qui peut se passer ». Nous attaquons à présent une tout autre question : à quelle condition une suite possède-t-elle une limite ? Les grands théorèmes présentés dans cette partie sont des théorèmes d'**existence** de limites.

3.1 Théorème des gendarmes, théorèmes de minoration/majoration

Théorème Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites réelles et $\ell \in \mathbb{R}$.

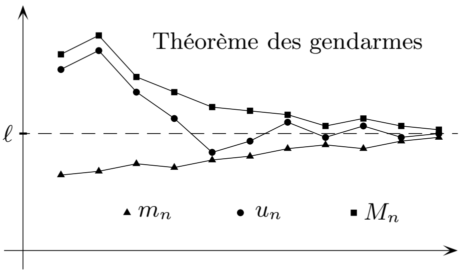
(i) **Théorème des gendarmes/de l'encadrement :** Si $\lim\limits_{n\to\infty} m_n = \lim\limits_{n\to\infty} M_n = \ell$, et si $m_n \leqslant u_n \leqslant M_n$ à partir d'un certain rang, alors $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ **existe** et $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \ell$.

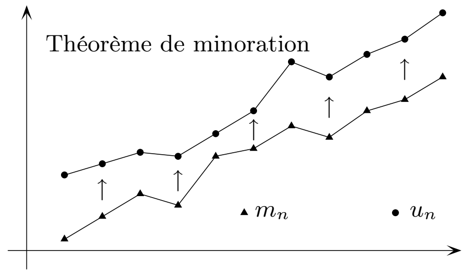
(ii) **Théorème de minoration :** Si $\lim\limits_{n\to\infty} m_n = \infty$ et si $u_n \geqslant m_n$ à partir d'un certain rang, alors $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ **existe** et $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \infty$.

(iii) **Théorème de majoration :** Si $\lim\limits_{n\to\infty} M_n = -\infty$ et si $u_n \leqslant M_n$ à partir d'un certain rang, alors $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ **existe** et $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = -\infty$.

✌ ✌ ✌ **Explication**

Les u_n sont forcés d'aller vers ℓ.





m_n pousse u_n vers ∞.

Démonstration

(i) Par hypothèse, il existe un rang N à partir duquel $m_n \leqslant u_n \leqslant M_n$.
Soit alors $\varepsilon > 0$. Par hypothèse sur $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$, il existe un rang N' à partir duquel $m_n \geqslant \ell - \varepsilon$ et un rang N'' à partir duquel $M_n \leqslant \ell + \varepsilon$. Posons $n_0 = \max\left\{N, N', N''\right\}$. Alors pour tout $n \geqslant n_0$:

$$\ell - \varepsilon \leqslant m_n \leqslant u_n \leqslant M_n \leqslant \ell + \varepsilon, \qquad \text{donc } |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

Conclusion : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang (n_0) à partir duquel $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$, i.e. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \ell$.

(ii) et (iii) Contentons-nous de démontrer l'assertion (ii). Par hypothèse, il existe un rang N à partir duquel $u_n \geqslant m_n$.
Soit alors $A > 0$. Par hypothèse sur $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, il existe un rang N' à partir duquel $m_n \geqslant A$. Posons simplement $n_0 = \max\left\{N, N'\right\}$. Alors pour tout $n \geqslant n_0$: $u_n \geqslant m_n \geqslant A$, donc $u_n \geqslant A$.
Conclusion : pour tout $A \in \mathbb{R}$, il existe un rang (n_0) à partir duquel $u_n \geqslant A$, i.e. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \infty$. ■

Le théorème des gendarmes est souvent utilisé sous l'une des deux formes suivantes :

Corollaire Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites.

(i) Si $|u_n| \leqslant \varepsilon_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et si $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$, alors $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

(ii) Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et si $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$, alors $\lim\limits_{n\to\infty} u_n\varepsilon_n = 0$.

Démonstration

(i) La condition « $|u_n| \leqslant \varepsilon_n$ » est équivalente à la condition « $-\varepsilon_n \leqslant u_n \leqslant \varepsilon_n$ ». Le théorème des gendarmes s'applique ici directement.

(ii) Puisque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, il existe $K \in \mathbb{R}_+$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leqslant K$.
Multiplions par ε_n : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n\varepsilon_n| \leqslant K|\varepsilon_n|$. Comme $\lim\limits_{n\to\infty} K|\varepsilon_n| = 0$, on utilise (i) pour conclure. ■

Exemple $\lim\limits_{n\to\infty} n! = \infty$.

En effet Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$: $n! = \prod\limits_{k=1}^{n} k = \prod\limits_{k=2}^{n} k \geqslant \prod\limits_{k=2}^{n} 2 = 2^{n-1}$. Or nous savons que $\lim\limits_{n\to\infty} 2^{n-1} = \infty$ car $2 > 1$, donc, via le théorème de minoration, que $\lim\limits_{n\to\infty} n! = \infty$.

Exemple **(Comparaison exponentielles/factorielle)** Soit $a \in \mathbb{R}$. $\qquad \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n!} = 0.$

En effet Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{a^n}{n!}$. On a : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{a}{n+1}$.
On remarque alors que pour tout $n \geqslant \lfloor 2|a| \rfloor$, on a $n \geqslant 2|a| - 1$, donc $n+1 \geqslant 2|a|$, donc $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \dfrac{|a|}{n+1} \leqslant \dfrac{1}{2}$.
Posons finalement $N = \lfloor 2|a| \rfloor + 1$. On obtient par produit, pour tout $n \geqslant N$:

$$\prod_{k=N-1}^{n-1} \left|\frac{u_{k+1}}{u_k}\right| = \left|\frac{u_n}{u_{N-1}}\right| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n-N+1}, \qquad \text{d'où } |u_n| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n 2^{N-1}|u_{N-1}|.$$

Or $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n 2^{N-1}|u_{N-1}| = 0$, l'entier N étant fixé. Le corollaire du théorème des gendarmes affirme finalement que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède une limite et que cette limite est 0 comme voulu.

Exemple $\quad \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{n^n} = 0.$

En effet Pour tout $n \in \mathbb{N}^\times$: $\quad 0 \leqslant \dfrac{n!}{n^n} = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{k}{n} = \frac{1}{n}\prod_{k=2}^{n} \frac{k}{n} \leqslant \frac{1}{n}$. On conclut grâce au théorème des gendarmes.

Exemple $\quad \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin n}{n} = 0.$

En effet Utilisez le corollaire du théorème des gendarmes : la suite $(\sin n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

3.2 Théorème de la limite monotone

Voici à présent un autre théorème d'**existence** pour les limites de suites, également fondamental.

Théorème **(Théorème de la limite monotone)** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

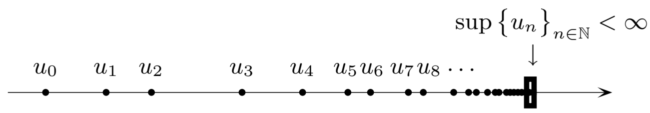
Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone, alors $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ **existe**.

Plus précisément, les bornes supérieures et inférieures étant prises **dans** $\bar{\mathbb{R}}$:

(i) si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, alors $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \sup\left\{u_n\right\}_{n\in\mathbb{N}}$; on retiendra qu'une suite croissante majorée converge et qu'une suite croissante non majorée diverge vers ∞ ;

(ii) si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, alors $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \inf\left\{u_n\right\}_{n\in\mathbb{N}}$; on retiendra qu'une suite décroissante minorée converge et qu'une suite décroissante non minorée diverge vers $-\infty$.

Explication Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée, les u_n viennent s'écraser contre leur « sup ».



Démonstration Contentons-nous de montrer (i).

- On suppose $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante et majorée. L'ensemble $\left\{u_n\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ est alors une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ et possède donc une borne supérieure **dans** $\mathbb{R}$ via la propriété de la borne supérieure. Notons-la ℓ et montrons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet ℓ pour limite.
Soit $\varepsilon > 0$. Le réel $\ell - \varepsilon$ n'est pas un majorant de $\left\{u_n\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ car ℓ en est le plus petit majorant. Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_N > \ell - \varepsilon$. On a donc, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant croissante, pour tout $n \geqslant N$: $\quad u_n \geqslant u_N > \ell - \varepsilon$; donc aussi : $\quad \ell - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant \ell \leqslant \ell + \varepsilon$, $\quad$ i.e. $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$.
Conclusion : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang (N) à partir duquel $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$, i.e. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \ell$.

- On suppose $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante et non majorée. Soit $A \in \mathbb{R}$. Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée par A, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_N > A$. Or $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, donc $u_n \geqslant u_N$ pour tout $n \geqslant N$. Finalement $u_n \geqslant A$ pour tout $n \geqslant N$.
Conclusion : pour tout $A \in \mathbb{R}$, il existe un rang (N) à partir duquel $u_n \geqslant A$, i.e. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \infty$. ■

✖✖✖ **Attention !**

- Une suite qui possède une limite n'est pas nécessairement monotone. Par exemple, la suite de terme général $\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$ est convergente de limite 0 mais non monotone : elle oscille en permanence autour de 0.
- Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante majorée par un certain réel M possède une limite, mais cette limite n'a aucune raison d'être M lui-même. Car M n'est jamais qu'un majorant parmi d'autres, $M+1$ aussi est un majorant de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$...
  Par exemple, la suite de terme général $1-\dfrac{1}{n}$ est croissante et majorée par 2, mais sa limite n'est pas 2, c'est 1. Retenez bien cela car ce genre d'erreur donne une très mauvaise impression des étudiants qui la commettent.

Les deux exemples suivants doivent être étudiés très sérieusement : vous devez absolument savoir faire ce type de raisonnement. Nous verrons d'autres exemples semblables dans peu de temps.

Exemple Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0=0$ et : $\forall n\in\mathbb{N},\quad u_{n+1}=u_n+e^{u_n}$. Cette suite est divergente de limite ∞.

En effet Cette suite est croissante car : $\forall n\in\mathbb{N},\quad u_{n+1}-u_n=e^{u_n}>0$. Le théorème de la limite monotone affirme donc l'existence de $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$, que nous notons ℓ, et affirme aussi que $\ell\in\mathbb{R}\cup\{\infty\}$.
Tâchons de déterminer ℓ et supposons pour ce faire que ℓ est un réel. On sait alors, puisque $\lim\limits_{x\to\ell} e^x=e^\ell$, que :

$$\ell=\lim_{n\to\infty} u_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(u_n+e^{u_n}\right)=\ell+e^\ell,\qquad \text{d'où } e^\ell=0.$$

Ce résultat étant absurde, nous en déduisons que ℓ n'est pas un réel, et donc $\ell=\infty$.

Exemple Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0=1$ et : $\forall n\in\mathbb{N},\quad u_{n+1}=\dfrac{u_n}{1+u_n^2}$. Cette suite est convergente de limite 0.

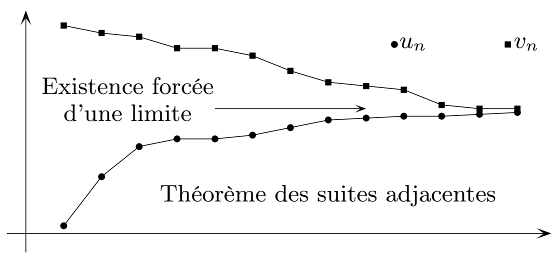
En effet Parce que l'intervalle $\mathbb{R}_+^\times$ est stabilisé par la fonction $x\longmapsto\dfrac{x}{1+x^2}$, et parce que $u_0=1\in\mathbb{R}_+^\times$, nous savons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement positive ; c'est le théorème d'existence des suites définies par récurrence qui nous le dit. Dans ce cas : $\forall n\in\mathbb{N},\quad u_{n+1}-u_n=\dfrac{u_n}{1+u_n^2}-u_n=\dfrac{-u_n^3}{1+u_n^2}\leqslant 0$. Ainsi $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et positive, donc convergente via le théorème de la limite monotone.
Il ne nous reste plus qu'à déterminer $\ell=\lim\limits_{n\to\infty} u_n$. Or : $\ell=\lim\limits_{n\to\infty} u_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{1+u_n^2}=\dfrac{\ell}{1+\ell^2}$. On en tire aisément l'équation $\ell-\dfrac{\ell}{1+\ell^2}=\dfrac{\ell^3}{1+\ell^2}=0$, qui donne finalement $\ell=0$.

3.3 Suites adjacentes

Définition (Suites adjacentes) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont *adjacentes* si l'une ces suites est croissante, l'autre décroissante et si $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n-v_n)=0$.

Théorème (Théorème des suites adjacentes) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. Si elles sont adjacentes, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont toutes deux convergentes de même limite ℓ.
Si c'est $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui est croissante et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui est décroissante, alors : $\forall m,n\in\mathbb{N},\quad u_m\leqslant\ell\leqslant v_n$.

✌✌✌ **Explication**
Intuitivement, deux suites adjacentes sont deux suites qui viennent à la rencontre l'une de l'autre, l'une en croissant, l'autre en décroissant, et qui finissent par s'écraser l'une contre l'autre. Le théorème des suites adjacentes affirme simplement que, puisqu'elles s'écrasent l'une contre l'autre à l'infini, il faut bien qu'elles s'écrasent *quelque part* l'une contre l'autre ; en d'autres termes il faut bien qu'elles s'approchent ensemble d'un même réel, l'une par le haut, l'autre par le bas. Ce réel est leur limite commune. Le théorème des suites adjacentes est lui aussi un théorème d'**existence** de limites.



Démonstration On suppose $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante.

- Montrons d'abord que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant v_n$.
Par l'absurde, supposons qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_N > v_N$, i.e. $u_N - v_N > 0$. Soit alors $n \geqslant N$. Sachant que $u_N \leqslant u_n$ (croissance) et que $v_n \leqslant v_N$ (décroissante), on a $u_n - v_n \geqslant u_N - v_N$. Faisant tendre n vers ∞ dans cette inégalité — par hypothèse $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n - v_n)$ existe — nous obtenons : $0 = \lim\limits_{n\to\infty}(u_n - v_n) \geqslant u_N - v_N > 0$. C'est absurde, notre affirmation en découle.

- Montrons ensuite que : $\forall m, n \in \mathbb{N}, \quad u_m \leqslant v_n$.
Soient $m, n \in \mathbb{N}$. Si $m \leqslant n$, alors $u_m \leqslant u_n \leqslant v_n$ par croissance de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et en vertu du premier point ; si au contraire $m > n$, la décroissance de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et le premier point montrent que $u_m \leqslant v_m \leqslant v_n$. Dans les deux cas, $u_m \leqslant v_n$.

- Concluons. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée (par v_0), donc convergente de limite un certain réel ℓ_u via le théorème de la limite monotone ; de même la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée (par u_0), donc convergente de limite un certain réel ℓ_v. Nous obtenons aussitôt l'égalité $\ell_u = \ell_v$ en utilisant l'hypothèse $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n - v_n) = 0$. Nous avons donc montré que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes de même limite.
Enfin, pour $m, n \in \mathbb{N}$, l'inégalité $u_m \leqslant \ell_u = \ell_v \leqslant v_n$ est une conséquence des inégalités démontrées au second point. L'entier m étant fixé, nous obtenons $u_m \leqslant \ell_v$ en faisant tendre n vers ∞ ; l'entier n étant fixé, nous obtenons $\ell_u \leqslant v_n$ en faisant tendre m vers ∞. ■

Exemple Les suites de termes généraux $u_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n.n!}$ sont adjacentes **donc convergentes**.
Nous verrons plus tard dans l'année que leur limite commune est le nombre e.

En effet C'est une application immédiate du théorème des suites adjacentes. Clairement, $\lim\limits_{n\to\infty}(v_n - u_n) = 0$.

- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\times}$ est croissante : $\forall n \in \mathbb{N}^\times, \quad u_{n+1} - u_n = \sum\limits_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} - \sum\limits_{=0}^{n} \frac{1}{k!} = \frac{1}{(n+1)!} \geqslant 0.$
- La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^\times}$ est décroissante :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\times, \quad v_{n+1} - v_n = \big(u_{n+1} - u_n\big) + \frac{1}{(n+1).(n+1)!} - \frac{1}{n.n!} = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1).(n+1)!} - \frac{1}{n.n!}$$
$$= \frac{1}{n(n+1).(n+1)!}\Big(n(n+1) + n - (n+1)^2\Big) = \frac{-1}{n(n+1).(n+1)!} \leqslant 0.$$

Exemple **(Approximation de $\sqrt{2}$ par la méthode des Babyloniens)** On définit deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $v_0 = 2$ et par : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{2}{v_n}$ et $v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$.

- On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n > 0$ et $v_n > 0$.
Cela se démontre aisément par récurrence. Pour commencer, $v_0 = 2 > 0$ et $u_0 = \frac{2}{v_0} = 1 > 0$.
Soit alors $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $u_n > 0$ et que $v_n > 0$. Alors clairement $v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} > 0$ et $u_{n+1} = \frac{2}{v_{n+1}} > 0$. Fin de la récurrence.

- Montrons que : $\forall n \in \mathbb{N}^\times, \quad u_n \leqslant \sqrt{2} \leqslant v_n$.
Or : $\forall n \in \mathbb{N}^\times, \quad v_n - \sqrt{2} = \frac{u_{n-1} + v_{n-1}}{2} - \sqrt{2} = \frac{u_{n-1}^2 + u_{n-1}v_{n-1} - 2\sqrt{2}u_{n-1}}{2u_{n-1}}$
$$= \frac{u_{n-1}^2 - 2\sqrt{2}u_{n-1} + 2}{2u_{n-1}} = \frac{\big(u_{n-1} - \sqrt{2}\big)^2}{2u_{n-1}} \geqslant 0, \qquad \text{i.e. } \sqrt{2} \leqslant v_n \text{ comme annoncé.}$$
On a donc bien également : $\forall n \in \mathbb{N}^\times, \quad u_n = \frac{2}{v_n} \leqslant \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$.

- Montrons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante. On utilise pour cela les inégalités montrées à l'instant au second point.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n = \frac{2}{v_{n+1}} - u_n = \frac{4}{u_n + v_n} - u_n = \frac{4 - u_n^2 - u_nv_n}{u_n + v_n} = \frac{4 - u_n^2 - 2}{u_n + v_n} = \frac{2 - u_n^2}{u_n + v_n} \geqslant 0.$
De même : $v_{n+1} - v_n = \frac{u_n + v_n}{2} - v_n = \frac{u_n - v_n}{2} \leqslant 0.$

- Ainsi $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée (par $\sqrt{2}$) et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante et minorée (par $\sqrt{2}$) ; ces deux suites convergent donc via le théorème de la limite monotone. Notons ℓ_u et ℓ_v leurs limites respectives. Faisant tendre n dans la relation $v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$, nous obtenons alors $\ell_v = \frac{\ell_u + \ell_v}{2}$, i.e. $\ell_u = \ell_v$. En particulier $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n - v_n) = 0$, de sorte que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.
Calculons enfin la valeur de $\ell_u = \ell_v$. Faisant tendre n vers ∞ dans l'inégalité $u_n \leqslant \sqrt{2} \leqslant v_n$, nous obtenons $\ell_u = \ell_v = \sqrt{2}$.

Il est facile de montrer, par récurrence, que les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de l'exemple précédent sont à valeurs *rationnelles*, i.e. à valeurs dans $\mathbb{Q}$. Nous avons donc obtenu le réel $\sqrt{2}$ comme limite de rationnels — par le bas avec $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, par le haut avec $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Pourtant $\sqrt{2}$ est *irrationnel*, i.e. non rationnel, nous l'avons montré dans notre chapitre d'introduction. Il apparaît donc ici que la limite d'une suite de rationnels n'est pas nécessairement un rationnel.

En réalité, on a un résultat beaucoup plus fort :

Théorème (Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$)

- Tout réel est limite d'une suite de rationnels — on dit que $\mathbb{Q}$ est *dense dans* $\mathbb{R}$.
- Précisément, soit $x\in\mathbb{R}$. Posons, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $a_n = \dfrac{\lfloor 10^n x\rfloor}{10^n}$ et $b_n = a_n + \dfrac{1}{10^n}$.

Alors $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites adjacentes à valeurs rationnelles de limite commune x. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, a_n est la valeur décimale approchée de x par défaut à 10^{-n} près et b_n est la valeur décimale approchée de x par excès à 10^{-n} près.

Explication Nous savons intuitivement, sans rentrer dans les détails, que tout réel possède un développement décimal illimité. Par exemple, $\pi = 3,141592653589793\ldots$ Calculez, pour $x=\pi$, les premiers termes des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$a_0 = 3,\quad a_1 = \frac{31}{10} = 3,1,\quad a_2 = \frac{314}{100} = 3,14,\quad a_3 = \frac{3141}{1000} = 3,141,\quad a_4 = \frac{31415}{10000} = 3,1415,\quad a_5 = \frac{314159}{100000} = 3,14159\ldots$$

$$\text{et}\quad b_0 = 4,\quad b_1 = \frac{32}{10} = 3,2,\quad b_2 = \frac{315}{100} = 3,15,\quad b_3 = \frac{3142}{1000} = 3,142,\quad b_4 = \frac{31416}{10000} = 3,1416,\quad b_5 = \frac{314160}{100000} = 3,14160\ldots$$

On voit bien que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers π.

Démonstration Fixons $x\in\mathbb{R}$ et montrons que x est la limite d'au moins une suite de rationnels. Avec les notations du théorème, il est clair que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont à valeurs rationnelles. Montrons qu'elles sont adjacentes.

- Il est évident que $\lim\limits_{n\to\infty}\big(b_n - a_n\big) = 0$.
- Montrons que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
  Soit donc $n\in\mathbb{N}$. Alors $10^n a_n = \lfloor 10^n x\rfloor \leqslant 10^n x$. Multiplions par 10 : $\quad 10^{n+1}a_n \leqslant 10^{n+1}x$.
  Or $10^{n+1}a_n\in\mathbb{Z}$, donc par définition de la partie entière : $\quad 10^{n+1}a_n \leqslant \lfloor 10^{n+1}x\rfloor = 10^{n+1}a_{n+1}$.
  Divisons enfin par 10 ; on obtient bien : $\quad a_n\leqslant a_{n+1}$.
- Montrons que $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
  Soit donc $n\in\mathbb{N}$. Alors $10^n b_n = 10^n a_n + 1 = \lfloor 10^n x\rfloor + 1 > 10^n x$. Multiplions par 10 : $\quad 10^{n+1}b_n > 10^{n+1}x$.
  Or $10^{n+1}b_n\in\mathbb{Z}$, donc : $\quad 10^{n+1}b_n \geqslant \lfloor 10^{n+1}x\rfloor + 1 = 10^{n+1}a_{n+1}+1 = 10^{n+1}b_{n+1}$.
  Divisons enfin par 10 ; on obtient bien : $\quad b_n\geqslant b_{n+1}$.

Les deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont finalement bien adjacentes, donc convergentes de limite commune un certain réel ℓ. Il nous reste à montrer que $\ell = x$. Or pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$a_n = \frac{\lfloor 10^n x\rfloor}{10^n} \leqslant \frac{10^n x}{10^n} = x < \frac{\lfloor 10^n x\rfloor + 1}{10^n} = \frac{\lfloor 10^n x\rfloor}{10^n} + \frac{1}{10^n} = a_n + \frac{1}{10^n} = b_n.$$

Faisant tendre n vers ∞ dans ces inégalités $a_n\leqslant x < b_n$, nous obtenons $\ell\leqslant x\leqslant \ell$, i.e. $\ell = x$ comme annoncé. ∎

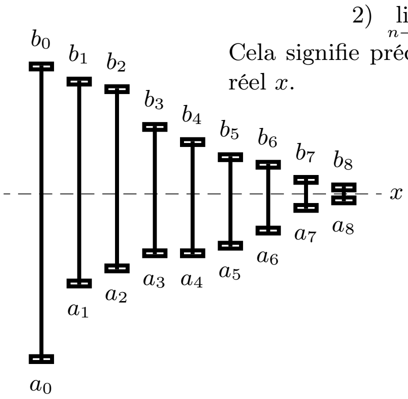
Le théorème suivant est une dernière application importante du théorème des suites adjacentes. Si $[a,b]$ est un segment $(a,b\in\mathbb{R}, a\leqslant b)$, on appelle *longueur de* $[a,b]$, notée $\lambda\big([a,b]\big)$, le réel positif $\quad \lambda\big([a,b]\big) = b-a$.

Théorème (Théorème des segments emboîtés) Soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de **segments** :

- décroissante au sens où : $\quad \forall n\in\mathbb{N},\quad I_{n+1}\subseteq I_n\quad$;
- dont la suite des longueurs converge vers 0, i.e. $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda(I_n) = 0$.

Alors $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n$ est un singleton, i.e. : $\quad \exists\, x\in\mathbb{R}/\quad \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n = \{x\}$.

Explication Ce théorème affirme que lorsqu'on prend l'intersection d'une famille décroissante de segments de longueurs tendant vers 0, il ne reste pas rien : il reste exactement UN élément.



Démonstration Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $a_n = \inf I_n$ et $b_n = \sup I_n$ de sorte que $I_n = [a_n, b_n]$. Par hypothèse :
1) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante ;
2) $\lim\limits_{n\to\infty} \big(b_n - a_n\big) = 0$.

Cela signifie précisément que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes, donc convergentes de même limite un certain réel x.

Montrons qu'on a : $\quad \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n = \{x\} \quad$ comme voulu.

- Soit $t \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n$. Montrons que $t = x$. Or par définition : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n \leqslant t \leqslant b_n$. Faisons tendre n vers ∞ : $\quad x \leqslant t \leqslant x$, i.e. $t = x$ en effet.
- Inversement, montrons que $x \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n$. Or ce résultat est une partie de l'énoncé du théorème des suites adjacentes : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n \leqslant x \leqslant b_n$, i.e. $x \in [a_n, b_n] = I_n$. ■

✖✖✖ **Attention !** Dans ce théorème, il est essentiel que les I_n soient des **segments**. Avec des intervalles ouverts ou semi-ouverts, le résultat est faux. Par exemple, $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}^\times} \left]0, \frac{1}{n}\right] = \varnothing$.

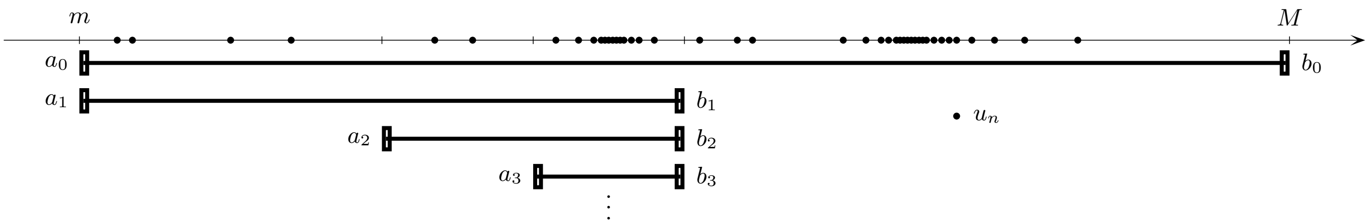
En effet Supposons cette intersection non vide et donnons-nous-en x un élément : $\quad \forall n \in \mathbb{N}^\times, \quad 0 < x \leqslant \frac{1}{n}$. Faisant tendre n vers ∞ dans l'inégalité de droite, nous obtenons aussitôt l'inégalité contradictoire $0 < x \leqslant 0$, ce qui prouve notre affirmation.

3.4 Théorème de Bolzano-Weierstrass

Contrairement aux autres théorèmes étudiées dans cette partie, ce théorème a pour nous un intérêt essentiellement théorique. Il établit une sorte de réciproque — mais pas jusqu'au bout — au résultat selon lequel toute suite convergente est bornée.

Théorème (Théorème de Bolzano-Weierstrass) De toute suite réelle bornée on peut extraire une suite convergente.

✌✌✌ **Explication** Ce théorème est un théorème d'existence de limites d'un genre un peu particulier. Il n'affirme pas que toute suite bornée est convergente — on a vu que c'est faux — mais qu'une suite bornée possède toujours une suite **extraite** convergente. Intuitivement, cela revient à dire que les valeurs d'une suite bornée sont forcées de s'accumuler autour d'au moins un point.



Démonstration Le programme stipule que vous n'êtes pas obligés de savoir refaire cette démonstration. Je vous conseille néanmoins de la travailler. Paradoxalement, l'*algorithme de dichotomie* décrit ci-après figure au programme et doit être bien compris.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée. Il existe $m, M \in \mathbb{R}$ tels que : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad m \leqslant u_n \leqslant M$.
Nous cherchons une application $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante pour laquelle $\big(u_{\varphi(n)}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. Nous allons construire pas à pas une telle φ au moyen d'un algorithme appelé *dichotomie*.

Posons $a_0 = m$, $b_0 = M$ et $\varphi(0) = 0$.

Soit alors $n \in \mathbb{N}$. Supposons construits $a_0, a_1, \ldots, a_n, b_0, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$ et $\varphi(0), \varphi(1), \ldots, \varphi(n) \in \mathbb{N}$ tels que :
(i) $\quad m = a_0 \leqslant a_1 \leqslant \ldots \leqslant a_n \leqslant b_n \leqslant b_{n-1} \leqslant \ldots \leqslant b_0 = M$;
(ii) $\quad \forall k \in [\![0, n]\!], \quad b_k - a_k = \dfrac{M - m}{2^k}$;
(iii) $\quad$ l'ensemble $\Big\{i \in \mathbb{N} / \quad u_i \in [a_k, b_k]\Big\}$ est infini pour tout $k \in [\![0, n]\!]$;
(iv) $\quad \forall k \in [\![0, n]\!], \quad u_{\varphi(k)} \in [a_k, b_k]$;
(v) $\quad \varphi(0) < \varphi(1) < \ldots < \varphi(n)$.

Nous allons construire trois réels a_{n+1}, b_{n+1} et $\varphi(n+1)$ rendant vraies les assertions (i) à (v) au rang $(n+1)$. Dans ce but, remarquons qu'au moins l'un des ensembles $\left\{k \in \mathbb{N}/ \quad u_k \in \left[a_n, \frac{a_n+b_n}{2}\right]\right\}$ et $\left\{k \in \mathbb{N}/ \quad u_k \in \left[\frac{a_n+b_n}{2}, b_n\right]\right\}$ est infini. Car si ces deux ensembles étaient finis, il en serait de même de leur réunion, ce qui contredirait (iii) :

$$\left\{k \in \mathbb{N}/ \quad u_k \in \left[a_n, \frac{a_n+b_n}{2}\right]\right\} \cup \left\{k \in \mathbb{N}/ \quad u_k \in \left[\frac{a_n+b_n}{2}, b_n\right]\right\} = \left\{k \in \mathbb{N}/ \quad u_k \in [a_n, b_n]\right\}.$$

Du coup, posons : $\begin{cases} a_{n+1} = a_n \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \dfrac{a_n+b_n}{2} & \text{si } \left\{k \in \mathbb{N}/ \quad u_k \in \left[a_n, \dfrac{a_n+b_n}{2}\right]\right\} \text{ est infini (cas } \spadesuit); \\ a_{n+1} = \dfrac{a_n+b_n}{2} \quad \text{et} \quad b_{n+1} = b_n & \text{sinon (cas } \clubsuit). \end{cases}$

Avec cette première construction, l'ensemble $\left\{k \in \mathbb{N}/ \quad u_k \in [a_{n+1}, b_{n+1}]\right\}$ est infini. Par conséquent l'ensemble $\left\{k \in \mathbb{N}/ \quad k > \varphi(n) \quad \text{et} \quad u_k \in [a_{n+1}, b_{n+1}]\right\}$ est aussi infini — c'est le même que le précédent, mais on lui a ôté tous ses éléments inférieurs ou égaux à $\varphi(n)$, qui sont en nombre fini. En particulier cet ensemble est une partie non vide de $\mathbb{N}$ et possède donc, en vertu d'un théorème démontré dans le chapitre sur les relations d'ordre, un plus petit élément que nous allons noter $\varphi(n+1)$.

- Montrons que (i) est vraie au rang $(n+1)$. Or puisque $a_n \leqslant b_n$ via (i) au rang n, on a $a_n \leqslant \dfrac{a_n+b_n}{2} \leqslant b_n$, et donc $a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n$, que l'on soit dans le cas $\spadesuit$ ou dans le cas $\clubsuit$.
- Montrons que (ii) est vraie au rang $(n+1)$: $\quad b_{n+1} - a_{n+1} = \begin{cases} \dfrac{a_n+b_n}{2} - a_n = \dfrac{b_n-a_n}{2} \overset{\text{(ii)}}{=} \dfrac{M-m}{2^{n+1}} & (\text{cas } \spadesuit); \\ b_n - \dfrac{a_n+b_n}{2} = \dfrac{b_n-a_n}{2} \overset{\text{(ii)}}{=} \dfrac{M-m}{2^{n+1}} & (\text{cas } \clubsuit). \end{cases}$
- Nous avons déjà observé que (iii) est vraie au rang $(n+1)$.
- Montrons que (iv) est vraie au rang $(n+1)$. Or par définition de $\varphi(n+1)$: $\quad u_{\varphi(n+1)} \in [a_{n+1}, b_{n+1}]$.
- Montrons que (v) est vraie au rang $(n+1)$. Or par définition de $\varphi(n+1)$: $\quad \varphi(n+1) > \varphi(n)$.

Ouf ! Notre construction pas à pas est achevée. Nous avons construit deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la première croissante et la seconde décroissante, et une application $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telles que :

1) $\forall n \in \mathbb{N}, \quad b_n - a_n = \dfrac{M-m}{2^n}$, donc en particulier $\lim\limits_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0$;
2) $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{\varphi(n)} \in [a_n, b_n]$.

Il apparaît ainsi que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites adjacentes de limite commune un certain réel ℓ. Or via 1) : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n \leqslant u_{\varphi(n)} \leqslant b_n$. Faisons enfin tendre n vers ∞ : le théorème des gendarmes affirme la **convergence** de $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et c'est justement ce que nous voulions. ■

4 Etude de suites définies par récurrence

Théorème (Monotonie des suites définies par récurrence) Soient D une partie de $\mathbb{R}$ — généralement un intervalle — et $f : D \longrightarrow D$ une fonction. Soient $u_0 \in D$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$.

- Si f est croissante, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone ; son sens de variation dépend de la position de u_0 par rapport à u_1.
- Si f est décroissante, $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones de sens contraires ; leurs sens de variation dépend de la position de u_0 et u_2.

✖✖✖ **Attention !** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(u_{2n})$ vaut u_{2n+1} et non pas u_{2n+2}. Par contre $u_{2n+2} = f \circ f(u_{2n})$.

✎✎✎ **En pratique** On s'attendra généralement à ce que vous redémontriez ce résultat au cas par cas dans les exercices. Sa preuve doit être maîtrisée parfaitement.

Démonstration

- Supposons f croissante et montrons que, si $u_0 \leqslant u_1$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante — on montrerait de même que si $u_1 \leqslant u_0$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Raisonnons par récurrence.

  1) **Initialisation :** $u_0 \leqslant u_1$ par hypothèse.

  2) **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $u_n \leqslant u_{n+1}$. Alors comme f est croissante, on a $u_{n+1} = f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) = u_{n+2}$ et c'est fini.

- Supposons f décroissante. Alors $f \circ f$ est croissante.
  Du coup, comme $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{2n+2} = u_{2(n+1)} = f \circ f(u_{2n})$, le premier point montre que $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone, croissante si $u_0 \leqslant u_2$, décroissante si $u_2 \leqslant u_0$.
  De même, puisque : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{2n+3} = u_{2(n+1)+1} = f \circ f(u_{2n+1})$, alors $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone, croissante si $u_1 \leqslant u_3$, décroissante si $u_3 \leqslant u_1$.
  Retenez bien l'idée qui vient de nous servir : puisque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est récurrente associée à la fonction f, $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont toutes deux récurrentes associées à $f \circ f$.

  Enfin f décroît, donc si $u_0 \leqslant u_2$ alors $u_3 = f(u_2) \leqslant f(u_0) = u_1$; et si $u_2 \leqslant u_0$ alors $u_1 = f(u_0) \leqslant f(u_2) = u_3$. Les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont donc bien monotones de sens contraires. ■

Le résultat suivant est momentanément admis car il requiert la notion de continuité d'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, notion que nous étudierons dans un prochain chapitre. Pour le comprendre et l'utiliser, on se contentera momentanément de la notion de continuité introduite intuitivement au lycée.

Théorème (Limite des suites définies par récurrence) Soient D une partie de $\mathbb{R}$ — généralement un intervalle — et $f : D \longrightarrow D$ une fonction. Soient $u_0 \in D$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$.

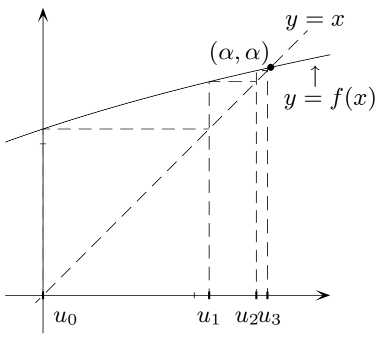
Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un certain réel $\ell \in \mathbb{R}$ et si f est continue en ℓ, alors ℓ est une *point fixe de* f, i.e. $f(\ell) = \ell$.

Nous présentons ci-après trois exemples de suites définies par récurrence avec des comportements différents. Etudiez-les attentivement.

✎✎✎ **En pratique**

- Vous remarquerez bien qu'il ne s'agit pas seulement dans ces exemples de calculer la valeur de la limite, mais aussi et surtout de prouver son **existence** — si existence il y a. Le théorème de la limite monotone trouve ici son application la plus classique.
- Dans tous les exemples de ce type, il est plus que conseillé de faire un dessin. On y voit tout de suite beaucoup plus clair.

Exemple Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \ln(u_n + 3)$.
Notons f la fonction $x \longmapsto \ln(x+3)$ définie sur $]-3, \infty[$.



- On a $u_1 = \ln(u_0 + 3) = \ln 3 \geqslant 0 = u_0$. Or f est croissante, donc via les théorèmes précédents nous savons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
- En vertu du théorème de la limite monotone, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède donc une limite ℓ. Cette limite ℓ est positive — éventuellement ∞ — car $u_0 = 0$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
- Comme f est continue sur $\mathbb{R}$, on sait que **si** ℓ est finie, alors $f(\ell) = \ell$. Par conséquent nous allons étudier les zéros de la fonction $g : x \longmapsto f(x) - x$. Et puisque $\ell \geqslant 0$, nous pouvons nous contenter de faire cette étude sur $\mathbb{R}_+$.

  1) La fonction g est dérivable sur $]-3, \infty[$ de dérivée $x \longmapsto -\dfrac{x+2}{x+3}$. Sur $\mathbb{R}_+$, cette dérivée est strictement négative, donc g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$.
  2) Par ailleurs g est continue sur $\mathbb{R}_+$.
  3) Enfin $g(0) = \ln 3$ et $\lim\limits_{\infty} g = -\infty$.

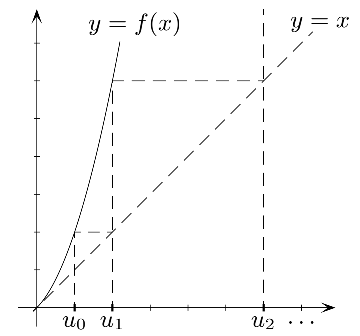
  Pour la limite, on remarque d'abord que : $\forall x \in]-3, \infty[, \quad g(x) = \ln(x+3) - x = -x\left(1 - \dfrac{\ln(x+3)}{x+3} \times \dfrac{x+3}{x}\right)$. Or $\lim\limits_{x\to\infty}(x+3) = \infty$ et $\lim\limits_{u\to\infty} \dfrac{\ln u}{u} = 0$, donc par composition $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln(x+3)}{x+3} = 0$. Par ailleurs $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x+3}{x} = 1$. Le calcul de la limite s'ensuit.

  Les points 1), 2) et 3) montrent ensemble, via un théorème de Terminale, que g réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $]-\infty, \ln 3]$. En particulier, puisque $0 \in]-\infty, \ln 3]$, l'équation $g(x) = 0$ ou $f(x) = x$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+$ possède une et une seule solution α.
- Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant \alpha$.

  1) **Initialisation :** $u_0 = 0 \leqslant \alpha$.

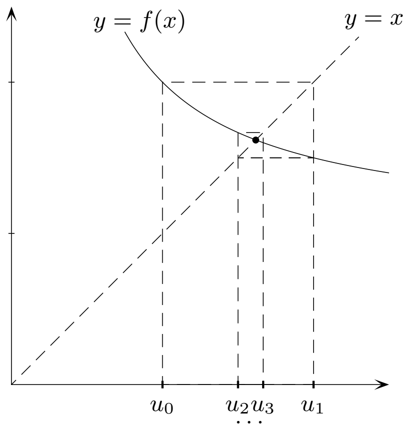
  2) **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $u_n \leqslant \alpha$. Alors f étant croissante, $u_{n+1} = f(u_n) \leqslant f(\alpha) = \alpha$ et voilà.
- Le point précédent montre en particulier que $\ell \in [0, \alpha]$, et nous pouvons dès lors affirmer que $f(\ell) = \ell$. Par définition de α, on obtient nécessairement $\ell = \alpha$.
- Conclusion : u_n tend en croissant vers α lorsque n tend vers ∞.

Exemple Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n^2 + u_n$.
Notons f la fonction $x \longmapsto x^2 + x$. Il est clair que $f(\mathbb{R}_+) \subseteq \mathbb{R}_+$.



- Puisque f est croissante sur $\mathbb{R}_+$, et puisque $u_1 = u_0^2 + u_0 = 2 \geqslant u_0$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. On pourrait aussi dire que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - u_n = u_n^2 \geqslant 0$.
- La croissance de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et l'égalité $u_0 = 1$ montrent ensemble que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geqslant 1$.
- Le théorème de la limite monotone implique que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède une limite ℓ. Via le point précédent, $\ell \in [1, \infty]$.
- Faisons l'hypothèse que ℓ est finie. Alors f étant continue sur $\mathbb{R}$, on a $f(\ell) = \ell$, i.e. $\ell^2 + \ell = \ell$, i.e. $\ell = 0$. Ce résultat contredit l'inégalité $\ell \geqslant 1$. Ainsi $\ell = \infty$.
- Conclusion : u_n tend en croissant vers ∞.

Exemple Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{u_n}$.
Notons f la fonction $x \longmapsto 1 + \dfrac{1}{x}$.



- Il est clair que $f(\mathbb{R}_+^\times) \subseteq \mathbb{R}_+^\times$. Puisque $u_0 \in \mathbb{R}_+^\times$, cela montre que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement positive.
- La fonction inverse étant décroissante sur $\mathbb{R}_+^\times$, la fonction f l'est tout autant. Or $u_1 = 2$ et $u_2 = \dfrac{3}{2} \geqslant u_0$. Nous en déduisons que $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante — sur une copie, il faudrait refaire proprement la preuve que nous avons faite plus haut.
- Le théorème de la limite monotone affirme que $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ possèdent toutes deux une limite, respectivement ℓ et ℓ'.
- Déterminons les points fixes de f sur $\mathbb{R}_+^\times$. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^\times$: $f(x) = x \iff 1 + \dfrac{1}{x} = x \iff x^2 - x - 1 = 0 \quad (x \neq 0)$

$$\iff x = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \quad \text{(discriminant égal à 5, } x > 0\text{).}$$

- Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{2n} \leqslant \dfrac{\sqrt{5}+1}{2} \leqslant u_{2n+1}$.

  1) **Initialisation :** $u_0 = 1 \leqslant \dfrac{\sqrt{5}+1}{2} \leqslant 2 = u_1$.

  2) **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $u_{2n} \leqslant \dfrac{\sqrt{5}+1}{2} \leqslant u_{2n+1}$. Or f est décroissante, donc $f\circ f$ est croissante :

$$u_{2(n+1)} = u_{2n+2} = f\circ f(u_{2n}) \leqslant f\circ f\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right) = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \leqslant f\circ f(u_{2n+1}) = u_{2n+3} = u_{2(n+1)+1}. \qquad \text{Fin de la récurrence.}$$

- Etant données l'ensemble des informations de monotonie/majoration/minoration dont nous disposons à présent, nous pouvons affirmer que $\ell \in \left[u_0, \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\right] = \left[1, \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}\right]$ et que $\ell' \in \left[\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}, u_1\right] = \left[\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}, 2\right]$. Dans tous les cas, $\ell, \ell' \in \mathbb{R}_+^\times$, intervalle sur lequel $f\circ f : x \longmapsto \dfrac{2x+1}{x+1}$ est continue. Sachant que $u_{2n+2} = f\circ f(u_{2n})$ et que $u_{2n+3} = f\circ f(u_{2n+1})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous en tirons donc ces deux égalités : $\ell = \dfrac{2\ell+1}{\ell+1}$ et $\ell' = \dfrac{2\ell'+1}{\ell'+1}$, que l'on peut réécrire ainsi :

$$\ell^2 - \ell - 1 = 0 \quad \text{et} \quad \ell'^2 - \ell' - 1 = 0. \qquad \text{Or } \ell \geqslant 0 \text{ et } \ell' \geqslant 0, \text{ d'où } \ell = \ell' = \frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

- Conclusion : $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ étant toutes deux convergentes de même limite $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$, le théorème sur les limites de suites extraites affirme enfin que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente de limite $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$.

✖✖✖ **Attention !**

- Quand on veut démontrer par récurrence une propriété de la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, par exemple « $u_{2n} \geqslant 0$ », l'hypothèse au rang suivant n'est pas « $u_{2n+1} \geqslant 0$ » mais « $u_{2(n+1)} = u_{2n+2} \geqslant 0$ ». Erreur classique à éviter.
- Dans le cas où f est décroissante, il se peut que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'ait pas de limite. C'est le cas des suites arithmético-géométriques (de la forme « $u_{n+1} = au_n + b$ ») pour $a \leqslant -1$.

5 Extension au cas des suites complexes

Nous allons brièvement étendre les résultats que nous avons obtenus pour les suites réelles aux suites complexes.

Définition (Suite complexe) On appelle *suite complexe* toute application u de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{C}$.

✖✖✖ **Attention !** Les notions de suite complexe majorée/minorée/monotone n'ont aucun sens car la relation $\leqslant$ n'est pas définie sur $\mathbb{C}$.

Malgré cela, la notion de suite bornée a toujours un sens.

Définition (Suite bornée) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *bornée* s'il existe $K \in \mathbb{R}_+$ tel que :

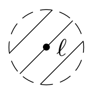
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leqslant K.$$

Les notions de suite extraite et de propriété vraie à partir d'un certain rang sont les mêmes dans le cas réel et dans le cas complexe.

Dans le cas des suites complexes, nous n'allons pas pouvoir définir la notion de limite infinie. Car où est l'infini dans $\mathbb{C}$? Y a-t-il un seul infini ? Un dans chaque direction ? Dans le cas des suites réelles, ces questions ne se posaient pas : il y avait clairement ∞ et $-\infty$ et ils étaient bien distincts. Remarquez d'ailleurs que nous avons pu définir ∞ et $-\infty$ parce que nous disposions sur $\mathbb{R}$ d'une relation d'ordre $\leqslant$; sur $\mathbb{C}$, point de relation d'ordre naturelle.

Définition (Voisinage dans $\mathbb{C}$) Soit $\ell \in \mathbb{C}$. On appelle *voisinage de ℓ (dans $\mathbb{C}$)* toute partie de $\mathbb{C}$ contenant un disque ouvert de centre ℓ, c'est-à-dire un ensemble de la forme $\left\{z \in \mathbb{C}/ \quad |z| < \varepsilon\right\}$ pour un certain $\varepsilon > 0$.

✌ ✌ ✌ **Explication**
Un voisinage de ℓ dans $\mathbb{C}$ est une partie de $\mathbb{C}$ qui contient tous les nombres complexes à proximité immédiate de ℓ. C'est la même notion que dans le cas réel, mais on travaille ici avec deux dimensions.



Voisinage typique de $\ell \in \mathbb{C}$

Définition (Limite d'une suite complexe) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe et $\ell \in \mathbb{C}$. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *admet ℓ pour limite* si tout voisinage de ℓ contient tous les u_n à partir d'un certain rang ; en d'autres termes, si :

$$\text{pour tout voisinage } \mathcal{V} \text{ de } \ell, \text{ il existe } N \in \mathbb{N} \text{ tel que } : \quad \forall n \geqslant N, \quad u_n \in \mathcal{V}.$$

Cela revient à dire que $\lim\limits_{n\to\infty} |u_n - \ell| = 0$, ce qui nous ramène au cas des limites de suites réelles.

Le théorème d'unicité de la limite est encore valable.

✌ ✌ ✌ **Explication** Cette définition est exactement la même que dans le cas des suites réelles. La seule chose qui a changé, c'est l'allure des voisinages.

Exemple Soit $a \in \mathbb{C}$ tel que $|a| < 1$. Alors $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$.

En effet Montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$ revient, comme dans le cas réel, à montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} \left|a^n\right| = 0$. Or nous savons très bien que $\lim\limits_{n\to\infty} |a|^n = 0$ quand $|a| < 1$.

Théorème (Caractérisation de la limite à partir des parties réelle et imaginaire) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe et $\ell \in \mathbb{C}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \ell$. (ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{Re}(u_n) = \mathrm{Re}(\ell)$ et $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{Im}(u_n) = \mathrm{Im}(\ell)$.

Démonstration

(i) $\Longrightarrow$ (ii) Supposons qu'on ait $\lim_{n\to\infty} u_n = \ell$. Montrons que $\lim_{n\to\infty} \mathrm{Re}(u_n) = \mathrm{Re}(\ell)$ — pour la partie imaginaire, remplacer « Re » par « Im ».
Soit $\varepsilon > 0$. Par hypothèse il existe un rang N à partir duquel $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$. En particulier, pour tout $n \geqslant N$:

$$\big|\mathrm{Re}(u_n) - \mathrm{Re}(\ell)\big| = \big|\mathrm{Re}(u_n - \ell)\big| \leqslant |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon. \qquad \text{D'où } \lim_{n\to\infty} \mathrm{Re}(u_n) = \mathrm{Re}(\ell).$$

(ii) $\Longrightarrow$ (i) Supposons qu'on ait $\lim_{n\to\infty} \mathrm{Re}(u_n) = \mathrm{Re}(\ell)$ et $\lim_{n\to\infty} \mathrm{Im}(u_n) = \mathrm{Im}(\ell)$. Alors par définition du module, et étant données les opérations qu'on peut faire sur les limites, $\lim_{n\to\infty} \big|u_n - \ell\big| = 0$. Ceci signifie précisément que $\lim_{n\to\infty} u_n = \ell$. ■

Exemple Nous savons que $\lim_{\infty} \mathrm{Arctan} = \frac{\pi}{2}$, donc par composition que $\lim_{n\to\infty} \mathrm{Arctan}\, n = \frac{\pi}{2}$; par ailleurs $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Par conséquent $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} + i\mathrm{Arctan}\, n\right) = \frac{i\pi}{2}$.

Les notions de suite convergente et de suite divergente sont les mêmes dans le cas réel et dans le cas complexe. Il est toujours vrai qu'une suite convergente est bornée.

Le théorème sur les limites de suites extraites est maintenu. De même les opérations d'addition, produit, multiplication par un scalaire et inverse sur les limites donnent lieu aux mêmes résultats que dans le cas réel, à ceci près que les symboles $\pm\infty$ sont bannis.

Les grands théorèmes d'existence de limites n'ont pas de sens dans le cas des suites complexes car ils utilisent de façon essentielle la relation d'ordre naturelle $\leqslant$ sur $\mathbb{R}$. Seul le théorème de Bolzano-Weierstrass échappe à cette remarque, mais il ne figure pas à notre programme dans le cas complexe.